ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ

учебное пособие для школьников и поступающих в вузы

Автор
Трепачёв Дмитрий

2025 год, v1.0.0

Введение

Всем привет! Меня зовут Трепачёв Дмитрий. Я работаю репетитором по математике, физике и информатике с 2010 года. За это время через мои занятия прошли сотни учеников — от пятиклассников, которые только начинают знакомиться с алгеброй, до выпускников, готовящихся к ЕГЭ и поступлению в вузы.

Эту книгу я сделал для своих занятий. Почему именно тригонометрические уравнения? Потому что это логичное продолжение предыдущей книги «Тригонометрические выражения». Если там мы учились преобразовывать и упрощать тригонометрические выражения, то здесь мы будем решать уравнения, в которых эти выражения встречаются.

Тригонометрические уравнения — одна из самых важных тем в школьной математике. Они встречаются и в ЕГЭ, и в ЦТ, и в олимпиадах, и в вузовской программе. Но главная трудность даже не в самих уравнениях, а в том, что методов решения очень много, и нужно уметь выбирать подходящий. В школьных учебниках эти методы обычно разбросаны по разным главам и классам, и ученику трудно увидеть общую картину.

В этой книге я собрал все основные методы решения тригонометрических уравнений в одном месте:

- простейшие уравнения и обратные тригонометрические функции;
- уравнения с линейной заменой $\sin(kx + b) = a$ и аналогичные;
- разложение на множители (вынесение общего множителя, группировка, преобразование суммы в произведение);
- уравнения, сводящиеся к квадратным (замена $t = \sin x$, $t = \cos x$, $t = \operatorname{tg} x$, $t = \operatorname{ctg} x$);
- однородные уравнения первой и второй степени;
- метод вспомогательного угла ($a \sin x + b \cos x = c$);
- уравнения с двойными углами;
- уравнения с обратными тригонометрическими функциями.

Каждому методу посвящена отдельная глава с теорией, подробными примерами и большим количеством задач. После каждого логического блока есть обобщающая глава-практика, а в конце — итоговая глава «Практика на все-все приёмы», где собраны задачи всех типов вперемешку.

Особое внимание в книге уделяется отбору корней и учёту области допустимых значений. В тригонометрических уравнениях это особенно важно, потому что легко получить лишние корни при возведении в квадрат или потерять корни при делении на выражение, которое может быть равно нулю.

Эта книга пригодится не только моим ученикам, но и всем, кто хочет разобраться в теме самостоятельно. А ещё я буду рад, если другие репетиторы станут использовать её на своих занятиях — берите свободно, пользуйтесь, задавайте побольше примеров своим ученикам.

Больше моих книг вы можете найти на сайте books.mrepetitor.com. Там есть и другие пособия по математике и физике — всё, что я наработал за годы преподавания, а также научно-популярные книги, написанные мною для тех учеников, которые хотят знать больше про историю науки и окружающий мир.

Записаться на мои занятия можно на сайте study.mrepetitor.com. Я преподаю математику и физику для школьников с 5 по 11 классы, готовлю к ЕГЭ, ОГЭ и ЦТ. Если вам или вашему ребёнку нужна помощь — милости прошу!

Удачи в изучении математики!

Дмитрий Трепачёв

Оглавление

Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс

Теория

Прежде чем решать тригонометрические уравнения, нужно познакомиться с обратными тригонометрическими функциями — арксинусом, арккосинусом, арктангенсом и арккотангенсом. Они позволяют записывать углы по известным значениям тригонометрических функций.

Арксинус

Арксинусом числа a называется такой угол α, что $\sin\alpha = a$ и $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

Обозначение: $\arcsin a$.

Область определения: $a \in [-1, 1]$. Область значений: $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Примеры:

$$\arcsin 0 = 0, \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \quad \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

Арккосинус

Арккосинусом числа a называется такой угол α, что $\cos\alpha = a$ и $0 \le \alpha \le \pi$.

Обозначение: $\arccos a$.

Область определения: $a \in [-1, 1]$. Область значений: $\alpha \in [0, \pi]$.

Примеры:

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \arccos 1 = 0, \quad \arccos(-1) = \pi, \quad \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

Арктангенс

Арктангенсом числа a называется такой угол α, что $\operatorname{tg}\alpha = a$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Обозначение: $\operatorname{arctg} a$.

Область определения: любое действительное число a. Область значений: $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Примеры:

$$\operatorname{arctg} 0 = 0, \quad \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

Арккотангенс

Арккотангенсом числа a называется такой угол α, что $\operatorname{ctg}\alpha = a$ и $0 < \alpha < \pi$.

Обозначение: $\operatorname{arcctg} a$.

Область определения: любое действительное число a. Область значений: $\alpha \in (0, \pi)$.

Примеры:

$$\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}, \quad \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$$

Полезные соотношения:

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$
$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$
$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$$
$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$$

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$$
$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Вычислим $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Нужно найти угол α из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Это угол $\frac{\pi}{4}$.
Ответ: $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Пример 2

Вычисление арккосинуса

Вычислим $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.
Нужно найти угол α из отрезка $[0, \pi]$, косинус которого равен $-\frac{1}{2}$. Это угол $\frac{2\pi}{3}$.
Ответ: $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Пример 3

Вычисление арктангенса

Вычислим $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$.
Нужно найти угол α из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен $\sqrt{3}$. Это угол $\frac{\pi}{3}$.
Ответ: $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

Пример 4

Вычисление арккотангенса

Вычислим $\operatorname{arcctg} 0$.
Нужно найти угол α из интервала $(0, \pi)$, котангенс которого равен 0. Это угол $\frac{\pi}{2}$.
Ответ: $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$.

Пример 5

Использование свойств

Найдём $\arccos\left(\cos \frac{5\pi}{4}\right)$.
Сначала $\cos \frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Теперь $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.
Обратите внимание: $\arccos(\cos x)$ не всегда равен x, а только если x попадает в область значений арккосинуса $[0, \pi]$. Здесь $\frac{5\pi}{4}$ не входит в этот отрезок, поэтому результат другой.

Пример 6

Общий алгоритм

При работе с обратными тригонометрическими функциями:

1. Помним области определения и значений.
2. Для вычисления значения функции находим угол из соответствующего промежутка.
3. Используем свойства для упрощения выражений.

Задачи

1. Вычислите значения арксинуса:

1) $\arcsin 0$

2) $\arcsin 1$

3) $\arcsin(-1)$

4) $\arcsin \frac{1}{2}$

5) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

6) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$

7) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

8) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$

9) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

10) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$

11) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

12) $\arcsin 2$ (имеет ли смысл?)

2. Вычислите значения арккосинуса:

1) $\arccos 0$
2) $\arccos 1$
3) $\arccos(-1)$
4) $\arccos\frac{1}{2}$
5) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$
6) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$
7) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
8) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$
9) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
10) $\arccos 0.5$
11) $\arccos(-0.5)$
12) $\arccos 2$ (имеет ли смысл?)

3. Вычислите значения арктангенса:

1) $\operatorname{arctg} 0$
2) $\operatorname{arctg} 1$
3) $\operatorname{arctg}(-1)$
4) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$
5) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$
6) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$
7) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
8) $\operatorname{arctg} 2$
9) $\operatorname{arctg}(-2)$
10) $\operatorname{arctg} 10$
11) $\operatorname{arctg}(-10)$
12) $\operatorname{arctg}\infty$ (не пишите так)

4. Вычислите значения арккотангенса:

1) $\operatorname{arcctg} 0$
2) $\operatorname{arcctg} 1$
3) $\operatorname{arcctg}(-1)$
4) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$
5) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$
6) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$
7) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
8) $\operatorname{arcctg} 2$
9) $\operatorname{arcctg}(-2)$
10) $\operatorname{arcctg} 10$
11) $\operatorname{arcctg}(-10)$
12) $\operatorname{arcctg} 0$ (ещё раз для проверки)

5. Упростите выражения, используя свойства:

1) $\arcsin(-a) + \arcsin a$
2) $\arccos(-a) + \arccos a$
3) $\operatorname{arctg}(-a) + \operatorname{arctg} a$
4) $\operatorname{arcctg}(-a) + \operatorname{arcctg} a$
5) $\arcsin a + \arccos a$
6) $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a$
7) $\arcsin(\sin\frac{\pi}{3})$
8) $\arccos(\cos\frac{\pi}{4})$
9) $\arcsin(\sin\frac{2\pi}{3})$
10) $\arccos(\cos\frac{5\pi}{6})$
11) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4})$
12) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3})$

6. Вычислите значения выражений:

1) $\arcsin\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{2}$
2) $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arcctg} 1$
3) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$
4) $\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arcctg}\sqrt{3}$
5) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$
6) $\operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arcctg}(-1)$
7) $\cos(\arcsin\frac{1}{2})$
8) $\sin(\arccos\frac{1}{2})$
9) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2)$
10) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 3)$
11) $\cos(\arcsin\frac{3}{5})$
12) $\sin(\arccos\frac{4}{5})$

Уравнение $\sin x = a$

Теория

В этой главе мы научимся решать простейшее тригонометрическое уравнение — уравнение вида $\sin x = a$.

Когда есть решения: Так как синус принимает значения только от -1 до 1, уравнение $\sin x = a$ имеет решения только при $|a| \leq 1$. Если $|a| > 1$, решений нет.

Формула корней: Если $|a| \leq 1$, то все решения уравнения $\sin x = a$ задаются формулой:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Объяснение формулы:

- $\arcsin a$ — это главное значение, угол из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.
- $(-1)^k \arcsin a$ даёт два семейства корней: при чётных k получаем $\arcsin a + 2\pi n$, при нечётных k получаем $\pi - \arcsin a + 2\pi n$.
- πk обеспечивает период 2π для каждого семейства.

Частные случаи:

- При $a = 0$: $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
- При $a = 1$: $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
- При $a = -1$: $\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Уравнение с табличным значением

Решим уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

Так как $\frac{1}{2} \leq 1$, решения существуют. Находим $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

По формуле: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Это означает, что при чётных k (например, $k = 2n$) получаем $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, а при нечётных k (например, $k = 2n+1$) получаем $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$.

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Пример 2

Уравнение с отрицательным значением

Решим уравнение $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Находим $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

По формуле: $x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Это можно записать и так: при чётных k получаем $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, при нечётных k получаем $x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi n = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$.

Ответ: $x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Пример 3

Частный случай: $a = 0$

Решим уравнение $\sin x = 0$.

По формуле: $\arcsin 0 = 0$, тогда $x = (-1)^k \cdot 0 + \pi k = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Это можно проверить и непосредственно: синус равен нулю в точках $x = \pi k$.

Ответ: $x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Пример 4

Частный случай: $a = 1$

Решим уравнение $\sin x = 1$.

$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. Тогда $x = (-1)^k \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

При чётных k: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. При нечётных k: $x = -\frac{\pi}{2} + \pi + 2\pi n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$? Проверим: при $k = 1$: $(-1)^1 \frac{\pi}{2} + \pi = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$. Получается то же самое! Значит, формула даёт один набор корней: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

На самом деле формула $(-1)^k \arcsin a + \pi k$ при $a = 1$ даёт $x = (-1)^k \frac{\pi}{2} + \pi k$. При $k = 2n$: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, при $k = 2n+1$: $x = -\frac{\pi}{2} + \pi + 2\pi n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Действительно, все корни совпадают.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 5

Уравнение с нетабличным значением

Решим уравнение $\sin x = \frac{1}{3}$.

$\arcsin \frac{1}{3}$ не является табличным значением, его можно оставить в ответе.

По формуле: $x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 6

Когда решений нет

Решим уравнение $\sin x = 2$.

Так как $2 > 1$, уравнение не имеет решений.

Ответ: корней нет.

Пример 7

Общий алгоритм

При решении уравнения $\sin x = a$:

1. Проверяем условие $|a| \le 1$. Если $|a| > 1$, сразу пишем: корней нет.
2. Находим $\arcsin a$ (табличное значение или оставляем как есть).
3. Записываем ответ по формуле $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
4. Для частных случаев ($a = 0, \pm 1$) можно упростить запись.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $\sin x = 0$

2) $\sin x = 1$

3) $\sin x = -1$

4) $\sin x = \frac{1}{2}$

5) $\sin x = -\frac{1}{2}$

6) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

7) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

8) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

9) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

10) $\sin x = \frac{1}{3}$

11) $\sin x = -\frac{1}{3}$

12) $\sin x = 2$

2. Решите уравнения:

1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

3) $\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (золотое сечение)

4) $\sin x = \frac{3}{5}$

5) $\sin x = -\frac{4}{5}$

6) $\sin x = \frac{5}{13}$

7) $\sin x = -\frac{12}{13}$

8) $\sin x = 0.2$

9) $\sin x = -0.7$

10) $\sin x = 0.99$

11) $\sin x = -0.99$

12) $\sin x = 1.5$

3. Найдите все корни уравнения на отрезке $[0, 2\pi]$:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$

2) $\sin x = -\frac{1}{2}$

3) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

5) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

6) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

7) $\sin x = 0$

8) $\sin x = 1$

9) $\sin x = -1$

10) $\sin x = \frac{1}{3}$

11) $\sin x = -\frac{1}{3}$

12) $\sin x = \frac{3}{5}$

4. Решите уравнения и запишите ответ в градусах:

1) $\sin x = 0$

2) $\sin x = 1$

3) $\sin x = -1$

4) $\sin x = \frac{1}{2}$

5) $\sin x = -\frac{1}{2}$

6) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

7) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

8) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

9) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

10) $\sin x = \frac{1}{2}$

11) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

12) $\sin x = 0.5$

5. Решите уравнения:

1) $\sin 2x = \frac{1}{2}$

2) $\sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4) $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0$

5) $\sin(x - \frac{\pi}{3}) = 1$

6) $\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

7) $\sin(3x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

8) $\sin \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$

9) $\sin(4x + \frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

10) $\sin(5x - \frac{\pi}{5}) = 0$

11) $\sin(6x + \frac{\pi}{12}) = -1$

12) $\sin(7x - \frac{\pi}{7}) = \frac{1}{2}$

6. Задачи повышенной сложности:

1) Найдите все решения уравнения $\sin x = \sin 2x$

2) Найдите все решения уравнения $\sin 3x = \sin x$

3) Найдите все решения уравнения $\sin^2 x = \frac{1}{4}$

4) Найдите все решения уравнения $\sin 2x = \cos x$

5) Найдите все решения уравнения $\sin x + \sin 2x = 0$

6) Найдите все решения уравнения $\sin 3x + \sin x = 0$

7) Сколько корней имеет уравнение $\sin x = \frac{1}{3}$ на отрезке $[0, 100\pi]$?

8) Сколько корней имеет уравнение $\sin x = 0.1$ на отрезке $[-10\pi, 10\pi]$?

9) При каких значениях a уравнение $\sin x = a$ имеет ровно 3 корня на отрезке $[0, 2\pi]$?

10) При каких значениях a уравнение $\sin x = a$ не имеет решений на отрезке $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$?

11) Решите уравнение $\sin x = x$ (графически)

12) Решите уравнение $\sin x = \frac{x}{2}$ (графически)

Уравнение $\cos x = a$

Теория

В этой главе мы научимся решать простейшее тригонометрическое уравнение — уравнение вида $\cos x = a$.

Когда есть решения: Так как косинус принимает значения только от -1 до 1, уравнение $\cos x = a$ имеет решения только при $|a| \leq 1$. Если $|a| > 1$, решений нет.

Формула корней: Если $|a| \leq 1$, то все решения уравнения $\cos x = a$ задаются формулой:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Объяснение формулы:

- $\arccos a$ — это главное значение, угол из промежутка $[0, \pi]$, косинус которого равен a.
- Знак $\pm$ даёт два семейства корней: $x = \arccos a + 2\pi k$ и $x = -\arccos a + 2\pi k$.
- $2\pi k$ обеспечивает период 2π.

Частные случаи:

- При $a = 0$: $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$
- При $a = 1$: $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$
- При $a = -1$: $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Уравнение с табличным значением

Решим уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.
Так как $\frac{1}{2} \leq 1$, решения существуют. Находим $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.
По формуле: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 2

Уравнение с отрицательным значением

Решим уравнение $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Находим $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.
По формуле: $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Это даёт два семейства: $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ и $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$.
Ответ: $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 3

Частный случай: $a = 0$

Решим уравнение $\cos x = 0$.
По формуле: $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, тогда $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Но $\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$ отличаются на π, поэтому формулу можно записать компактнее: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 4

Частный случай: $a = 1$

Решим уравнение $\cos x = 1$.
$\arccos 1 = 0$. Тогда $x = \pm 0 + 2\pi k = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Пример 5

Частный случай: $a = -1$

Решим уравнение $\cos x = -1$.
$\arccos(-1) = \pi$. Тогда $x = \pm\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
При $k = 0$ получаем $x = \pi$ и $x = -\pi$, но $-\pi = \pi - 2\pi$, поэтому оба семейства объединяются в $x = \pi + 2\pi k$.
Ответ: $x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Пример 6

Уравнение с нетабличным значением

Решим уравнение $\cos x = \frac{2}{3}$.
$\arccos \frac{2}{3}$ не является табличным значением, его можно оставить в ответе.
По формуле: $x = \pm \arccos \frac{2}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \pm \arccos \frac{2}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Пример 7

Когда решений нет

Решим уравнение $\cos x = 3$.
Так как $3 > 1$, уравнение не имеет решений.
Ответ: корней нет.

Пример 8

Общий алгоритм

При решении уравнения $\cos x = a$:

1. Проверяем условие $|a| \le 1$. Если $|a| > 1$, сразу пишем: корней нет.
2. Находим $\arccos a$ (табличное значение или оставляем как есть).
3. Записываем ответ по формуле $x = \pm \arccos a + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
4. Для частных случаев ($a = 0, \pm 1$) можно упростить запись.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $\cos x = 0$ **4)** $\cos x = \frac{1}{2}$ **7)** $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **10)** $\cos x = \frac{1}{3}$

2) $\cos x = 1$ **5)** $\cos x = -\frac{1}{2}$ **8)** $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **11)** $\cos x = -\frac{1}{3}$

3) $\cos x = -1$ **6)** $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **9)** $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **12)** $\cos x = 2$

2. Решите уравнения:

1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **4)** $\cos x = \frac{3}{5}$ **7)** $\cos x = -\frac{12}{13}$ **10)** $\cos x = 0.99$

2) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ **5)** $\cos x = -\frac{4}{5}$ **8)** $\cos x = 0.2$ **11)** $\cos x = -0.99$

3) $\cos x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ **6)** $\cos x = \frac{5}{13}$ **9)** $\cos x = -0.7$ **12)** $\cos x = 1.5$

3. Найдите все корни уравнения на отрезке $[0, 2\pi]$:

1) $\cos x = \frac{1}{2}$

2) $\cos x = -\frac{1}{2}$

3) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

5) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

6) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

7) $\cos x = 0$

8) $\cos x = 1$

9) $\cos x = -1$

10) $\cos x = \frac{1}{3}$

11) $\cos x = -\frac{1}{3}$

12) $\cos x = \frac{3}{5}$

4. Решите уравнения и запишите ответ в градусах:

1) $\cos x = 0$

2) $\cos x = 1$

3) $\cos x = -1$

4) $\cos x = \frac{1}{2}$

5) $\cos x = -\frac{1}{2}$

6) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

7) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

8) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

9) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

10) $\cos x = \frac{1}{2}$

11) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

12) $\cos x = 0.5$

5. Решите уравнения:

1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$

2) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4) $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$

5) $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = 1$

6) $\cos(2x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

7) $\cos(3x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

8) $\cos \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$

9) $\cos(4x + \frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

10) $\cos(5x - \frac{\pi}{5}) = 0$

11) $\cos(6x + \frac{\pi}{12}) = -1$

12) $\cos(7x - \frac{\pi}{7}) = \frac{1}{2}$

6. Задачи повышенной сложности:

1) Найдите все решения уравнения $\cos x = \cos 2x$

2) Найдите все решения уравнения $\cos 3x = \cos x$

3) Найдите все решения уравнения $\cos^2 x = \frac{1}{4}$

4) Найдите все решения уравнения $\cos 2x = \sin x$

5) Найдите все решения уравнения $\cos x + \cos 2x = 0$

6) Найдите все решения уравнения $\cos 3x + \cos x = 0$

7) Сколько корней имеет уравнение $\cos x = \frac{1}{3}$ на отрезке $[0, 100\pi]$?

8) Сколько корней имеет уравнение $\cos x = 0.1$ на отрезке $[-10\pi, 10\pi]$?

9) При каких значениях a уравнение $\cos x = a$ имеет ровно 2 корня на отрезке $[0, 2\pi]$?

10) При каких значениях a уравнение $\cos x = a$ не имеет решений на отрезке $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$?

11) Решите уравнение $\cos x = x$ (графически)

12) Решите уравнение $\cos x = \frac{x}{2}$ (графически)

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$

Теория

В этой главе мы научимся решать простейшее тригонометрическое уравнение — уравнение вида $\operatorname{tg} x = a$.

Когда есть решения: В отличие от синуса и косинуса, тангенс может принимать любые действительные значения. Поэтому уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет решения при любом $a \in \mathbb{R}$.

Формула корней: Все решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$ задаются формулой:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Объяснение формулы:

- $\operatorname{arctg} a$ — это главное значение, угол из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.
- πk обеспечивает период π, так как тангенс имеет период π.

Частные случаи:

- При $a = 0$: $\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
- При $a = 1$: $\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
- При $a = -1$: $\operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
- При $a = \sqrt{3}$: $\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
- При $a = -\sqrt{3}$: $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
- При $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$: $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Важное замечание: При решении уравнений с тангенсом нужно помнить про область определения. Тангенс не определён в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. Эти значения никогда не будут корнями уравнения $\operatorname{tg} x = a$, так как в них тангенс не существует.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Уравнение с табличным значением

Решим уравнение $\operatorname{tg} x = 1$.
Находим $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.
По формуле: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Пример 2

Уравнение с отрицательным значением

Решим уравнение $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.
Находим $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$.
По формуле: $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Пример 3

Частный случай: $a = 0$

Решим уравнение $\operatorname{tg} x = 0$.
$\operatorname{arctg} 0 = 0$. Тогда $x = 0 + \pi k = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Пример 4

Уравнение с нетабличным значением

Решим уравнение $\operatorname{tg} x = 2$.
$\operatorname{arctg} 2$ не является табличным значением, его можно оставить в ответе.
По формуле: $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Пример 5

Проверка области определения

Убедимся, что корни не попадают в точки, где тангенс не определён. Например, для уравнения $\operatorname{tg} x = 1$ корни $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$. При любом целом k это никогда не равно $\frac{\pi}{2} + \pi n$, так как $\frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{2} + \pi n$ даёт $\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi(n-k)$, что невозможно. Значит, все корни входят в область определения.

Пример 6

Общий алгоритм

При решении уравнения $\operatorname{tg} x = a$:

1. Находим $\operatorname{arctg} a$ (табличное значение или оставляем как есть).
2. Записываем ответ по формуле $x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
3. Помним, что тангенс определён при всех x, кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, но полученные корни автоматически не попадают в эти точки (можно проверить при необходимости).

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $\operatorname{tg} x = 0$	**4)** $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$	**7)** $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	**10)** $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$
2) $\operatorname{tg} x = 1$	**5)** $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$	**8)** $\operatorname{tg} x = 2$	**11)** $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$
3) $\operatorname{tg} x = -1$	**6)** $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$	**9)** $\operatorname{tg} x = -2$	**12)** $\operatorname{tg} x = 10$

2. Решите уравнения:

1) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$	**4)** $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	**7)** $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	**10)** $\operatorname{tg} x = -3$
2) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$	**5)** $\operatorname{tg} x = \sqrt{2}$	**8)** $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	**11)** $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$
3) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$	**6)** $\operatorname{tg} x = -\sqrt{2}$	**9)** $\operatorname{tg} x = 3$	**12)** $\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}$

3. Найдите все корни уравнения на отрезке $[0, 2\pi]$:

1) $\operatorname{tg} x = 0$	**4)** $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$	**7)** $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	**10)** $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$
2) $\operatorname{tg} x = 1$	**5)** $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$	**8)** $\operatorname{tg} x = 2$	**11)** $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$
3) $\operatorname{tg} x = -1$	**6)** $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$	**9)** $\operatorname{tg} x = -2$	**12)** $\operatorname{tg} x = 3$

4. Решите уравнения и запишите ответ в градусах:

1) $\operatorname{tg} x = 0$	**4)** $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$	**7)** $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	**10)** $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$
2) $\operatorname{tg} x = 1$	**5)** $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$	**8)** $\operatorname{tg} x = 2$	**11)** $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$
3) $\operatorname{tg} x = -1$	**6)** $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$	**9)** $\operatorname{tg} x = -2$	**12)** $\operatorname{tg} x = 3$

5. Решите уравнения:

1) $\operatorname{tg} 2x = 1$

2) $\operatorname{tg} 3x = -\sqrt{3}$

3) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

4) $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}) = 0$

5) $\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{3}) = 1$

6) $\operatorname{tg}(2x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

7) $\operatorname{tg}(3x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}$

8) $\operatorname{tg} \frac{x}{3} = -1$

9) $\operatorname{tg}(4x + \frac{\pi}{8}) = 0$

10) $\operatorname{tg}(5x - \frac{\pi}{5}) = 2$

11) $\operatorname{tg}(6x + \frac{\pi}{12}) = -2$

12) $\operatorname{tg}(7x - \frac{\pi}{7}) = \frac{1}{2}$

6. Задачи повышенной сложности:

1) Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2x$

2) Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x$

3) Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg}^2 x = 1$

4) Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} x$

5) Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 0$

6) Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x = 0$

7) Сколько корней имеет уравнение $\operatorname{tg} x = 1$ на отрезке $[0, 100\pi]$?

8) Сколько корней имеет уравнение $\operatorname{tg} x = 2$ на отрезке $[-10\pi, 10\pi]$?

9) При каких значениях a уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет ровно 2 корня на отрезке $[0, 2\pi]$?

10) При каких значениях a уравнение $\operatorname{tg} x = a$ не имеет решений на отрезке $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$?

11) Решите уравнение $\operatorname{tg} x = x$ (графически)

12) Решите уравнение $\operatorname{tg} x = \frac{x}{2}$ (графически)

Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$

Теория

В этой главе мы научимся решать простейшее тригонометрическое уравнение — уравнение вида $\operatorname{ctg} x = a$.

Когда есть решения: Как и тангенс, котангенс может принимать любые действительные значения. Поэтому уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ имеет решения при любом $a \in \mathbb{R}$.

Формула корней: Все решения уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ задаются формулой:

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Объяснение формулы:

- $\operatorname{arcctg} a$ — это главное значение, угол из промежутка $(0, \pi)$, котангенс которого равен a.
- πk обеспечивает период π, так как котангенс имеет период π.

Связь с арктангенсом: Для положительных a: $\operatorname{arcctg} a = \operatorname{arctg} \frac{1}{a}$ (при $a > 0$). Для отрицательных a: $\operatorname{arcctg} a = \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{a}$ (так как arctg даёт угол из $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, а arcctg из $(0, \pi)$).

Частные случаи:

- При $a = 0$: $\operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
- При $a = 1$: $\operatorname{ctg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
- При $a = -1$: $\operatorname{ctg} x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
- При $a = \sqrt{3}$: $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
- При $a = -\sqrt{3}$: $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
- При $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$: $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Важное замечание: При решении уравнений с котангенсом нужно помнить про область определения. Котангенс не определён в точках $x = \pi k$. Эти значения никогда не будут корнями уравнения $\operatorname{ctg} x = a$, так как в них котангенс не существует.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Уравнение с табличным значением

Решим уравнение $\operatorname{ctg} x = 1$.

Находим $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

По формуле: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Пример 2

Уравнение с отрицательным значением

Решим уравнение $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

Находим $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$. Можно найти по определению: угол из $(0, \pi)$, котангенс которого равен $-\sqrt{3}$. Это угол $\frac{5\pi}{6}$ (так как $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$).

По формуле: $x = \frac{5\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{5\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Пример 3

Частный случай: $a = 0$

Решим уравнение $\operatorname{ctg} x = 0$.

$\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$. Тогда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Пример 4

Использование связи с арктангенсом

Решим уравнение $\operatorname{ctg} x = 2$.
Можно записать $\operatorname{arcctg} 2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ (так как $2 > 0$).
Тогда $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Пример 5

Уравнение с нетабличным отрицательным значением

Решим уравнение $\operatorname{ctg} x = -2$.
Для отрицательного a: $\operatorname{arcctg}(-2) = \pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.
Тогда $x = \pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Пример 6

Проверка области определения

Убедимся, что корни не попадают в точки, где котангенс не определён. Например, для уравнения $\operatorname{ctg} x = 1$ корни $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$. При любом целом k это никогда не равно πn, так как $\frac{\pi}{4} + \pi k = \pi n$ даёт $\frac{\pi}{4} = \pi(n - k)$, что невозможно. Значит, все корни входят в область определения.

Пример 7

Общий алгоритм

При решении уравнения $\operatorname{ctg} x = a$:

1. Находим $\operatorname{arcctg} a$ (табличное значение, или используем связь с arctg, или оставляем как есть).
2. Записываем ответ по формуле $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
3. Помним, что котангенс определён при всех x, кроме $x = \pi k$, но полученные корни автоматически не попадают в эти точки (можно проверить при необходимости).

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $\operatorname{ctg} x = 0$ **2)** $\operatorname{ctg} x = 1$ **3)** $\operatorname{ctg} x = -1$ **4)** $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$ **5)** $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ **6)** $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **7)** $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ **8)** $\operatorname{ctg} x = 2$ **9)** $\operatorname{ctg} x = -2$ **10)** $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}$ **11)** $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{2}$ **12)** $\operatorname{ctg} x = 10$

2. Решите уравнения:

1) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$ **2)** $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ **3)** $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **4)** $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ **5)** $\operatorname{ctg} x = \sqrt{2}$ **6)** $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{2}$ **7)** $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **8)** $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **9)** $\operatorname{ctg} x = 3$ **10)** $\operatorname{ctg} x = -3$ **11)** $\operatorname{ctg} x = \frac{3}{4}$ **12)** $\operatorname{ctg} x = -\frac{4}{3}$

3. Найдите все корни уравнения на отрезке $[0, 2\pi]$:

1) $\operatorname{ctg} x = 0$ **2)** $\operatorname{ctg} x = 1$ **3)** $\operatorname{ctg} x = -1$ **4)** $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$ **5)** $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ **6)** $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **7)** $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ **8)** $\operatorname{ctg} x = 2$

9) $\operatorname{ctg} x = -2$ **10)** $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}$ **11)** $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{2}$ **12)** $\operatorname{ctg} x = 3$

4. Решите уравнения и запишите ответ в градусах:

1) $\operatorname{ctg} x = 0$ **4)** $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$ **7)** $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ **10)** $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}$

2) $\operatorname{ctg} x = 1$ **5)** $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ **8)** $\operatorname{ctg} x = 2$ **11)** $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{2}$

3) $\operatorname{ctg} x = -1$ **6)** $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **9)** $\operatorname{ctg} x = -2$ **12)** $\operatorname{ctg} x = 3$

5. Решите уравнения:

1) $\operatorname{ctg} 2x = 1$

2) $\operatorname{ctg} 3x = -\sqrt{3}$

3) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

4) $\operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{4}) = 0$

5) $\operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{3}) = 1$

6) $\operatorname{ctg}(2x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

7) $\operatorname{ctg}(3x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}$

8) $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} = -1$

9) $\operatorname{ctg}(4x + \frac{\pi}{8}) = 0$

10) $\operatorname{ctg}(5x - \frac{\pi}{5}) = 2$

11) $\operatorname{ctg}(6x + \frac{\pi}{12}) = -2$

12) $\operatorname{ctg}(7x - \frac{\pi}{7}) = \frac{1}{2}$

6. Задачи повышенной сложности:

1) Найдите все решения уравнения $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} 2x$

2) Найдите все решения уравнения $\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{ctg} x$

3) Найдите все решения уравнения $\operatorname{ctg}^2 x = 1$

4) Найдите все решения уравнения $\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{tg} x$

5) Найдите все решения уравнения $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 2x = 0$

6) Найдите все решения уравнения $\operatorname{ctg} 3x + \operatorname{ctg} x = 0$

7) Сколько корней имеет уравнение $\operatorname{ctg} x = 1$ на отрезке $[0, 100\pi]$?

8) Сколько корней имеет уравнение $\operatorname{ctg} x = 2$ на отрезке $[-10\pi, 10\pi]$?

9) При каких значениях a уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ имеет ровно 2 корня на отрезке $[0, 2\pi]$?

10) При каких значениях a уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ не имеет решений на отрезке $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$?

11) Решите уравнение $\operatorname{ctg} x = x$ (графически)

12) Решите уравнение $\operatorname{ctg} x = \frac{x}{2}$ (графически)

Практика по блоку 1

Теория

В этом блоке мы изучили простейшие тригонометрические уравнения:

- $\sin x = a$: $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (при $|a| \le 1$)
- $\cos x = a$: $x = \pm \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (при $|a| \le 1$)
- $\operatorname{tg} x = a$: $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (при любом a)
- $\operatorname{ctg} x = a$: $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (при любом a)

Также мы познакомились с обратными тригонометрическими функциями: арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс.

В этой главе собраны задачи на все эти типы уравнений вперемешку. Ваша задача — определить, какое уравнение перед вами, и применить нужную формулу.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $\sin x = 0$ **4)** $\operatorname{ctg} x = 1$ **7)** $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ **10)** $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\cos x = 1$ **5)** $\sin x = \frac{1}{2}$ **8)** $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ **11)** $\operatorname{tg} x = -1$

3) $\operatorname{tg} x = 0$ **6)** $\cos x = -\frac{1}{2}$ **9)** $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **12)** $\operatorname{ctg} x = 0$

2. Решите уравнения:

1) $\sin x = -1$ **4)** $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$ **7)** $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ **10)** $\cos x = \frac{2}{3}$

2) $\cos x = 0$ **5)** $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **8)** $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ **11)** $\operatorname{tg} x = 2$

3) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **6)** $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **9)** $\sin x = \frac{1}{3}$ **12)** $\operatorname{ctg} x = -2$

3. Найдите все корни уравнений на отрезке $[0, 2\pi]$:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$ **4)** $\operatorname{ctg} x = -1$ **7)** $\operatorname{tg} x = 0$ **10)** $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\cos x = -\frac{1}{2}$ **5)** $\sin x = 0$ **8)** $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$ **11)** $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

3) $\operatorname{tg} x = 1$ **6)** $\cos x = 1$ **9)** $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **12)** $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

4. Решите уравнения и запишите ответ в градусах:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$ **4)** $\operatorname{ctg} x = -1$ **7)** $\operatorname{tg} x = 0$ **10)** $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\cos x = -\frac{1}{2}$ **5)** $\sin x = 0$ **8)** $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$ **11)** $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

3) $\operatorname{tg} x = 1$ **6)** $\cos x = 1$ **9)** $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **12)** $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

5. Решите уравнения (сложные случаи):

1) $\sin 2x = \frac{1}{2}$ **3)** $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}$ **5)** $\sin(x - \frac{\pi}{3}) = 0$

2) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **4)** $\operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{4}) = 1$ **6)** $\cos(2x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

7) $\operatorname{tg}(3x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

8) $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} = -1$

9) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$

10) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

11) $\operatorname{tg}^2 x = 1$

12) $\operatorname{ctg}^2 x = 3$

6. Определите, сколько корней имеет уравнение на указанном промежутке:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$ на $[0, 2\pi]$

2) $\cos x = -\frac{1}{2}$ на $[0, 2\pi]$

3) $\operatorname{tg} x = 1$ на $[0, 2\pi]$

4) $\operatorname{ctg} x = -1$ на $[0, 2\pi]$

5) $\sin x = \frac{1}{3}$ на $[0, 4\pi]$

6) $\cos x = \frac{1}{3}$ на $[0, 4\pi]$

7) $\operatorname{tg} x = 2$ на $[0, 2\pi]$

8) $\operatorname{ctg} x = -2$ на $[0, 2\pi]$

9) $\sin x = 0$ на $[-\pi, \pi]$

10) $\cos x = 1$ на $[0, 4\pi]$

11) $\operatorname{tg} x = 0$ на $[-\pi, \pi]$

12) $\operatorname{ctg} x = 0$ на $[0, 2\pi]$

7. Задачи повышенной сложности:

1) Найдите все решения уравнения $\sin x = \cos x$

2) Найдите все решения уравнения $\sin x = \operatorname{tg} x$

3) Найдите все решения уравнения $\cos x = \operatorname{ctg} x$

4) Найдите все решения уравнения $\sin^2 x = \cos^2 x$

5) Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$

6) Найдите все решения уравнения $\sin 2x = \cos x$

7) Найдите все решения уравнения $\cos 2x = \sin x$

8) Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} x$

9) При каких значениях a уравнение $\sin x = a$ имеет ровно 2 корня на $[0, 2\pi]$?

10) При каких значениях a уравнение $\cos x = a$ имеет ровно 1 корень на $[0, \pi]$?

11) При каких значениях a уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет ровно 3 корня на $[0, 2\pi]$?

12) При каких значениях a уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ имеет ровно 2 корня на $[0, 2\pi]$?

Уравнения вида $\sin(kx + b) = a$

Теория

В этой главе мы научимся решать уравнения, которые после замены переменной сводятся к простейшему уравнению $\sin t = a$. Пример такого уравнения:

$$\sin(kx + b) = a$$

где $k \neq 0$, a, b — известные числа, x — неизвестное.

Метод решения:

1. Делаем замену $t = kx + b$.
2. Решаем уравнение $\sin t = a$ относительно t:

$$t = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

   (при условии $|a| \leq 1$, иначе решений нет)

3. Возвращаемся к x:

$$kx + b = (-1)^n \arcsin a + \pi n$$

$$kx = (-1)^n \arcsin a + \pi n - b$$

$$x = \frac{(-1)^n \arcsin a + \pi n - b}{k}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Важное замечание: При делении на k нужно следить за знаком и периодом. В ответе n (или другая буква) пробегает все целые числа.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простейший случай

Решим уравнение $\sin 2x = \frac{1}{2}$.
Делаем замену $t = 2x$. Получаем $\sin t = \frac{1}{2}$.
Решаем: $t = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Возвращаемся: $2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$.
Делим на 2: $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2

Уравнение со сдвигом

Решим уравнение $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Замена $t = 3x - \frac{\pi}{4}$. Получаем $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Решаем: $t = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Возвращаемся: $3x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$.
Переносим: $3x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n + \frac{\pi}{4}$.
Делим на 3: $x = \frac{(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n + \frac{\pi}{4}}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.
Это можно упростить для чётных и нечётных n отдельно, но в таком виде ответ тоже допустим.

Пример 3

Отрицательное значение a

Решим уравнение $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.
Замена $t=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}$. Получаем $\sin t=-\frac{1}{2}$.
$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$. Тогда $t=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$.
Возвращаемся: $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$.
Переносим: $\frac{x}{2}=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n-\frac{\pi}{6}$.
Умножаем на 2: $x=2\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n-\frac{\pi}{6}\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

Пример 4

Когда $|a|>1$

Решим уравнение $\sin(5x-2)=2$.
Так как $2>1$, уравнение не имеет решений.
Ответ: корней нет.

Пример 5

Общий алгоритм

При решении уравнения $\sin(kx+b)=a$:

1. Проверяем условие $|a|\le 1$. Если $|a|>1$, ответ: корней нет.
2. Делаем замену $t=kx+b$.
3. Решаем $\sin t=a$: $t=(-1)^n\arcsin a+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.
4. Возвращаемся к x: $kx+b=(-1)^n\arcsin a+\pi n$.
5. Выражаем x: $x=\frac{(-1)^n\arcsin a+\pi n-b}{k}$, $n\in\mathbb{Z}$.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $\sin 2x=\frac{1}{2}$
2) $\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}$
3) $\sin 4x=\frac{\sqrt{3}}{2}$
4) $\sin\frac{x}{2}=0$
5) $\sin\frac{x}{3}=1$
6) $\sin\frac{x}{4}=-1$
7) $\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$
8) $\sin(x-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{2}$
9) $\sin(2x+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$
10) $\sin(2x-\frac{\pi}{8})=0$
11) $\sin(3x+\frac{\pi}{5})=1$
12) $\sin(3x-\frac{\pi}{7})=-1$

2. Решите уравнения:

1) $\sin 2x=-\frac{1}{2}$
2) $\sin 3x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
3) $\sin 4x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
4) $\sin\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$
5) $\sin\frac{x}{3}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
6) $\sin\frac{x}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
7) $\sin(x+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}$
8) $\sin(x-\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
9) $\sin(2x+\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
10) $\sin(2x-\frac{\pi}{8})=-\frac{1}{2}$
11) $\sin(3x+\frac{\pi}{5})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
12) $\sin(3x-\frac{\pi}{7})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Решите уравнения (с нетабличными значениями):

1) $\sin 2x=\frac{1}{3}$
2) $\sin 3x=-\frac{2}{3}$
3) $\sin 4x=\frac{3}{5}$
4) $\sin\frac{x}{2}=-\frac{4}{5}$
5) $\sin(x+\frac{\pi}{5})=\frac{5}{13}$
6) $\sin(x-\frac{\pi}{6})=-\frac{12}{13}$
7) $\sin(2x+\frac{\pi}{7})=\frac{7}{25}$
8) $\sin(2x-\frac{\pi}{8})=-\frac{24}{25}$
9) $\sin(3x+\frac{\pi}{9})=0.3$
10) $\sin(3x-\frac{\pi}{10})=-0.7$
11) $\sin(4x+\frac{\pi}{11})=0.99$
12) $\sin(4x-\frac{\pi}{12})=-0.99$

4. Найдите все корни уравнений на отрезке $[0,2\pi]$:

1) $\sin 2x = \frac{1}{2}$

2) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$

3) $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4) $\sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

5) $\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

6) $\sin \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

7) $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0$

8) $\sin(x - \frac{\pi}{3}) = 1$

9) $\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = -1$

10) $\sin(2x - \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}$

11) $\sin(3x + \frac{\pi}{5}) = -\frac{1}{2}$

12) $\sin(3x - \frac{\pi}{7}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Решите уравнения и запишите ответ в градусах:

1) $\sin 2x = \frac{1}{2}$

2) $\sin 3x = -\frac{1}{2}$

3) $\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4) $\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

5) $\sin(x + 30^\circ) = \frac{1}{2}$

6) $\sin(x - 45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

7) $\sin(2x + 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

8) $\sin(2x - 30^\circ) = 0$

9) $\sin(3x + 15^\circ) = 1$

10) $\sin(3x - 75^\circ) = -1$

11) $\sin(4x + 45^\circ) = \frac{1}{2}$

12) $\sin(4x - 30^\circ) = -\frac{1}{2}$

6. Задачи повышенной сложности:

1) Найдите все решения уравнения $\sin 2x = \sin x$

2) Найдите все решения уравнения $\sin 3x = \sin x$

3) Найдите все решения уравнения $\sin 2x = \cos x$

4) Найдите все решения уравнения $\sin 3x = \cos 2x$

5) Сколько корней имеет уравнение $\sin 2x = \frac{1}{2}$ на $[0, 2\pi]$?

6) Сколько корней имеет уравнение $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ на $[0, 2\pi]$?

7) При каких значениях a уравнение $\sin 2x = a$ имеет ровно 4 корня на $[0, 2\pi]$?

8) При каких значениях a уравнение $\sin 3x = a$ имеет ровно 6 корней на $[0, 2\pi]$?

9) Решите уравнение $\sin 2x = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$

10) Решите уравнение $\sin 3x = \sin(3x - \frac{\pi}{4})$

11) Решите уравнение $\sin 4x = \cos 4x$

12) Решите уравнение $\sin 5x = \cos 3x$

Уравнения вида $\cos(kx + b) = a$

Теория

В этой главе мы научимся решать уравнения, которые после замены переменной сводятся к простейшему уравнению $\cos t = a$. Пример такого уравнения:

$$\cos(kx + b) = a$$

где $k \neq 0$, a, b — известные числа, x — неизвестное.

Метод решения:

1. Делаем замену $t = kx + b$.
2. Решаем уравнение $\cos t = a$ относительно t:

$$t = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

(при условии $|a| \leq 1$, иначе решений нет)

3. Возвращаемся к x:

$$kx + b = \pm \arccos a + 2\pi n$$

$$kx = \pm \arccos a + 2\pi n - b$$

$$x = \frac{\pm \arccos a + 2\pi n - b}{k}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Важное замечание: Знак $\pm$ означает, что мы получаем две серии решений. Их можно записать отдельно или объединить под одним знаком $\pm$.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простейший случай

Решим уравнение $\cos 2x = \frac{1}{2}$.
Делаем замену $t = 2x$. Получаем $\cos t = \frac{1}{2}$.
Решаем: $t = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Возвращаемся: $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$.
Делим на 2: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2

Уравнение со сдвигом

Решим уравнение $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Замена $t = 3x - \frac{\pi}{4}$. Получаем $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Решаем: $t = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Возвращаемся: $3x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$.
Рассмотрим два случая: 1) $3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$ 2) $3x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \Rightarrow 3x = 0 + 2\pi n \Rightarrow x = \frac{2\pi n}{3}$
Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$ и $x = \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 3

Отрицательное значение a

Решим уравнение $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.
Замена $t=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}$. Получаем $\cos t=-\frac{1}{2}$.
$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$. Тогда $t=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$.
Возвращаемся: $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$.
Переносим: $\frac{x}{2}=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n-\frac{\pi}{6}$.
Умножаем на 2: $x=2\left(\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n-\frac{\pi}{6}\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.
Можно упростить для каждого знака отдельно: При +: $x = 2\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2\pi n\right) = 2\left(\frac{4\pi}{6}-\frac{\pi}{6}+2\pi n\right) = 2\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=\pi+4\pi n$ При −: $x=2\left(-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)=2\left(-\frac{4\pi}{6}-\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)=2\left(-\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)=-\frac{5\pi}{3}+4\pi n$
Ответ: $x=\pi+4\pi n$ и $x=-\frac{5\pi}{3}+4\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Пример 4

Когда $|a|>1$

Решим уравнение $\cos(5x-2)=3$.
Так как $3>1$, уравнение не имеет решений.
Ответ: корней нет.

Пример 5

Общий алгоритм

При решении уравнения $\cos(kx+b)=a$:

1. Проверяем условие $|a|\le 1$. Если $|a|>1$, ответ: корней нет.
2. Делаем замену $t=kx+b$.
3. Решаем $\cos t=a$: $t=\pm\arccos a+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.
4. Возвращаемся к x: $kx+b=\pm\arccos a+2\pi n$.
5. Выражаем x: $x=\frac{\pm\arccos a+2\pi n-b}{k}$, $n\in\mathbb{Z}$.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $\cos 2x=\frac{1}{2}$
2) $\cos 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}$
3) $\cos 4x=\frac{\sqrt{3}}{2}$
4) $\cos\frac{x}{2}=0$
5) $\cos\frac{x}{3}=1$
6) $\cos\frac{x}{4}=-1$
7) $\cos(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$
8) $\cos(x-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{2}$
9) $\cos(2x+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$
10) $\cos(2x-\frac{\pi}{8})=0$
11) $\cos(3x+\frac{\pi}{5})=1$
12) $\cos(3x-\frac{\pi}{7})=-1$

2. Решите уравнения:

1) $\cos 2x=-\frac{1}{2}$
2) $\cos 3x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
3) $\cos 4x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
4) $\cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$
5) $\cos\frac{x}{3}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
6) $\cos\frac{x}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
7) $\cos(x+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}$
8) $\cos(x-\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
9) $\cos(2x+\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
10) $\cos(2x-\frac{\pi}{8})=-\frac{1}{2}$
11) $\cos(3x+\frac{\pi}{5})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
12) $\cos(3x-\frac{\pi}{7})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Решите уравнения (с нетабличными значениями):

1) $\cos 2x=\frac{1}{3}$
2) $\cos 3x=-\frac{2}{3}$
3) $\cos 4x=\frac{3}{5}$
4) $\cos\frac{x}{2}=-\frac{4}{5}$
5) $\cos(x+\frac{\pi}{5})=\frac{5}{13}$
6) $\cos(x-\frac{\pi}{6})=-\frac{12}{13}$
7) $\cos(2x+\frac{\pi}{7})=\frac{7}{25}$
8) $\cos(2x-\frac{\pi}{8})=-\frac{24}{25}$
9) $\cos(3x+\frac{\pi}{9})=0.3$

10) $\cos(3x - \frac{\pi}{10}) = -0.7$

11) $\cos(4x + \frac{\pi}{11}) = 0.99$

12) $\cos(4x - \frac{\pi}{12}) = -0.99$

4. Найдите все корни уравнений на отрезке $[0, 2\pi]$:

1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$

2) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$

3) $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

5) $\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

6) $\cos \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

7) $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$

8) $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = 1$

9) $\cos(2x + \frac{\pi}{6}) = -1$

10) $\cos(2x - \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}$

11) $\cos(3x + \frac{\pi}{5}) = -\frac{1}{2}$

12) $\cos(3x - \frac{\pi}{7}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Решите уравнения и запишите ответ в градусах:

1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$

2) $\cos 3x = -\frac{1}{2}$

3) $\cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4) $\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

5) $\cos(x + 30°) = \frac{1}{2}$

6) $\cos(x - 45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

7) $\cos(2x + 60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

8) $\cos(2x - 30°) = 0$

9) $\cos(3x + 15°) = 1$

10) $\cos(3x - 75°) = -1$

11) $\cos(4x + 45°) = \frac{1}{2}$

12) $\cos(4x - 30°) = -\frac{1}{2}$

6. Задачи повышенной сложности:

1) Найдите все решения уравнения $\cos 2x = \cos x$

2) Найдите все решения уравнения $\cos 3x = \cos x$

3) Найдите все решения уравнения $\cos 2x = \sin x$

4) Найдите все решения уравнения $\cos 3x = \sin 2x$

5) Сколько корней имеет уравнение $\cos 2x = \frac{1}{2}$ на $[0, 2\pi]$?

6) Сколько корней имеет уравнение $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ на $[0, 2\pi]$?

7) При каких значениях a уравнение $\cos 2x = a$ имеет ровно 4 корня на $[0, 2\pi]$?

8) При каких значениях a уравнение $\cos 3x = a$ имеет ровно 6 корней на $[0, 2\pi]$?

9) Решите уравнение $\cos 2x = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$

10) Решите уравнение $\cos 3x = \cos(3x - \frac{\pi}{4})$

11) Решите уравнение $\cos 4x = \sin 4x$

12) Решите уравнение $\cos 5x = \sin 3x$

Уравнения вида $\mathrm{tg}(kx + b) = a$

Теория

В этой главе мы научимся решать уравнения, которые после замены переменной сводятся к простейшему уравнению $\mathrm{tg}\, t = a$. Пример такого уравнения:

$$\mathrm{tg}(kx + b) = a$$

где $k \neq 0$, a, b — известные числа, x — неизвестное.

Метод решения:

1. Делаем замену $t = kx + b$.
2. Решаем уравнение $\mathrm{tg}\, t = a$ относительно t:

$$t = \mathrm{arctg}\, a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

   (уравнение имеет решения при любом a)

3. Возвращаемся к x:

$$kx + b = \mathrm{arctg}\, a + \pi n$$

$$kx = \mathrm{arctg}\, a + \pi n - b$$

$$x = \frac{\mathrm{arctg}\, a + \pi n - b}{k}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Важное замечание: При решении уравнений с тангенсом нужно помнить про область определения. Тангенс не определён в точках $t = \frac{\pi}{2} + \pi m$. Полученные корни не должны попадать в эти точки. Обычно это проверяется автоматически, но в некоторых случаях может потребоваться дополнительная проверка.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простейший случай

Решим уравнение $\mathrm{tg}\, 2x = 1$.
Делаем замену $t = 2x$. Получаем $\mathrm{tg}\, t = 1$.
Решаем: $t = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Возвращаемся: $2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$.
Делим на 2: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2

Уравнение со сдвигом

Решим уравнение $\mathrm{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$.
Замена $t = 3x - \frac{\pi}{4}$. Получаем $\mathrm{tg}\, t = \sqrt{3}$.
$\mathrm{arctg}\, \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. Тогда $t = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Возвращаемся: $3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + \pi n$.
Переносим: $3x = \frac{\pi}{3} + \pi n + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} + \pi n = \frac{7\pi}{12} + \pi n$.
Делим на 3: $x = \frac{7\pi}{36} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \frac{7\pi}{36} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 3

Отрицательное значение a

Решим уравнение $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.
Замена $t=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}$. Получаем $\operatorname{tg} t=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.
$\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6}$. Тогда $t=-\frac{\pi}{6}+\pi n$.
Возвращаемся: $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+\pi n$.
Переносим: $\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{6}+\pi n-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+\pi n$.
Умножаем на 2: $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
Ответ: $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Пример 4

Проверка области определения

Проверим, не попадают ли полученные корни в точки, где тангенс не определён. Например, для уравнения $\operatorname{tg} 2x=1$ мы получили $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$. При каких n может получиться $2x=\frac{\pi}{2}+\pi m$? Подставим: $2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right)=\frac{\pi}{4}+\pi n$. Это равно $\frac{\pi}{2}+\pi m$ только если $\frac{\pi}{4}+\pi n=\frac{\pi}{2}+\pi m$, то есть $\pi n-\pi m=\frac{\pi}{4}$, что невозможно при целых n, m. Значит, все корни допустимы.

Пример 5

Общий алгоритм

При решении уравнения $\operatorname{tg}(kx+b)=a$:

1. Делаем замену $t=kx+b$.
2. Решаем $\operatorname{tg} t=a$: $t=\operatorname{arctg} a+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
3. Возвращаемся к x: $kx+b=\operatorname{arctg} a+\pi n$.
4. Выражаем x: $x=\frac{\operatorname{arctg} a+\pi n-b}{k},\ n\in\mathbb{Z}$.
5. При необходимости проверяем, что корни не попадают в точки, где тангенс не определён.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $\operatorname{tg} 2x=1$
2) $\operatorname{tg} 3x=\sqrt{3}$
3) $\operatorname{tg} 4x=\frac{1}{\sqrt{3}}$
4) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$
5) $\operatorname{tg}\frac{x}{3}=1$
6) $\operatorname{tg}\frac{x}{4}=-1$
7) $\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{3}$
8) $\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{\sqrt{3}}$
9) $\operatorname{tg}(2x+\frac{\pi}{6})=1$
10) $\operatorname{tg}(2x-\frac{\pi}{8})=0$
11) $\operatorname{tg}(3x+\frac{\pi}{5})=\sqrt{3}$
12) $\operatorname{tg}(3x-\frac{\pi}{7})=\frac{1}{\sqrt{3}}$

2. Решите уравнения:

1) $\operatorname{tg} 2x=-1$
2) $\operatorname{tg} 3x=-\sqrt{3}$
3) $\operatorname{tg} 4x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$
4) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-1$
5) $\operatorname{tg}\frac{x}{3}=-\sqrt{3}$
6) $\operatorname{tg}\frac{x}{4}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$
7) $\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{4})=-1$
8) $\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{3})=-\sqrt{3}$
9) $\operatorname{tg}(2x+\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{\sqrt{3}}$
10) $\operatorname{tg}(2x-\frac{\pi}{8})=-1$
11) $\operatorname{tg}(3x+\frac{\pi}{5})=-\sqrt{3}$
12) $\operatorname{tg}(3x-\frac{\pi}{7})=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

3. Решите уравнения (с нетабличными значениями):

1) $\operatorname{tg} 2x=2$
2) $\operatorname{tg} 3x=-3$
3) $\operatorname{tg} 4x=\frac{1}{2}$
4) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-\frac{1}{3}$
5) $\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{5})=\frac{5}{4}$
6) $\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{6})=-\frac{4}{3}$
7) $\operatorname{tg}(2x+\frac{\pi}{7})=\frac{7}{5}$
8) $\operatorname{tg}(2x-\frac{\pi}{8})=-\frac{8}{3}$
9) $\operatorname{tg}(3x+\frac{\pi}{9})=0.3$
10) $\operatorname{tg}(3x-\frac{\pi}{10})=-0.7$
11) $\operatorname{tg}(4x+\frac{\pi}{11})=0.99$
12) $\operatorname{tg}(4x-\frac{\pi}{12})=-0.99$

4. Найдите все корни уравнений на отрезке $[0, 2\pi]$:

1) $\operatorname{tg} 2x = 1$

2) $\operatorname{tg} 2x = -1$

3) $\operatorname{tg} 3x = \sqrt{3}$

4) $\operatorname{tg} 3x = -\sqrt{3}$

5) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

6) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

7) $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}) = 0$

8) $\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{3}) = 1$

9) $\operatorname{tg}(2x + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$

10) $\operatorname{tg}(2x - \frac{\pi}{8}) = -\sqrt{3}$

11) $\operatorname{tg}(3x + \frac{\pi}{5}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

12) $\operatorname{tg}(3x - \frac{\pi}{7}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

5. Решите уравнения и запишите ответ в градусах:

1) $\operatorname{tg} 2x = 1$

2) $\operatorname{tg} 3x = -\sqrt{3}$

3) $\operatorname{tg} 4x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

4) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$

5) $\operatorname{tg}(x + 30°) = 1$

6) $\operatorname{tg}(x - 45°) = -\sqrt{3}$

7) $\operatorname{tg}(2x + 60°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

8) $\operatorname{tg}(2x - 30°) = 0$

9) $\operatorname{tg}(3x + 15°) = 1$

10) $\operatorname{tg}(3x - 75°) = -1$

11) $\operatorname{tg}(4x + 45°) = \sqrt{3}$

12) $\operatorname{tg}(4x - 30°) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

6. Задачи повышенной сложности:

1) Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$

2) Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x$

3) Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} x$

4) Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{ctg} 2x$

5) Сколько корней имеет уравнение $\operatorname{tg} 2x = 1$ на $[0, 2\pi]$?

6) Сколько корней имеет уравнение $\operatorname{tg} 3x = \sqrt{3}$ на $[0, 2\pi]$?

7) При каких значениях a уравнение $\operatorname{tg} 2x = a$ имеет ровно 4 корня на $[0, 2\pi]$?

8) При каких значениях a уравнение $\operatorname{tg} 3x = a$ имеет ровно 6 корней на $[0, 2\pi]$?

9) Решите уравнение $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(2x + \frac{\pi}{3})$

10) Решите уравнение $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}(3x - \frac{\pi}{4})$

11) Решите уравнение $\operatorname{tg} 4x = \operatorname{ctg} 4x$

12) Решите уравнение $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{ctg} 3x$

Уравнения вида $\operatorname{ctg}(kx + b) = a$

Теория

В этой главе мы научимся решать уравнения, которые после замены переменной сводятся к простейшему уравнению $\operatorname{ctg} t = a$. Пример такого уравнения:

$$\operatorname{ctg}(kx + b) = a$$

где $k \neq 0$, a, b — известные числа, x — неизвестное.

Метод решения:

1. Делаем замену $t = kx + b$.
2. Решаем уравнение $\operatorname{ctg} t = a$ относительно t:

$$t = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

(уравнение имеет решения при любом a)

3. Возвращаемся к x:

$$kx + b = \operatorname{arcctg} a + \pi n$$
$$kx = \operatorname{arcctg} a + \pi n - b$$
$$x = \frac{\operatorname{arcctg} a + \pi n - b}{k}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Связь с арктангенсом: Для положительных a: $\operatorname{arcctg} a = \operatorname{arctg} \frac{1}{a}$. Для отрицательных a: $\operatorname{arcctg} a = \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{a}$.

Важное замечание: При решении уравнений с котангенсом нужно помнить про область определения. Котангенс не определён в точках $t = \pi m$. Полученные корни не должны попадать в эти точки. Обычно это проверяется автоматически, но в некоторых случаях может потребоваться дополнительная проверка.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простейший случай

Решим уравнение $\operatorname{ctg} 2x = 1$.
Делаем замену $t = 2x$. Получаем $\operatorname{ctg} t = 1$.
Решаем: $t = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Возвращаемся: $2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$.
Делим на 2: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2

Уравнение со сдвигом

Решим уравнение $\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$.
Замена $t = 3x - \frac{\pi}{4}$. Получаем $\operatorname{ctg} t = \sqrt{3}$.
$\operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$. Тогда $t = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Возвращаемся: $3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + \pi n$.
Переносим: $3x = \frac{\pi}{6} + \pi n + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} + \pi n = \frac{5\pi}{12} + \pi n$.
Делим на 3: $x = \frac{5\pi}{36} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \frac{5\pi}{36} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 3

Отрицательное значение a

Решим уравнение $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Замена $t=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}$. Получаем $\operatorname{ctg} t=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Найдём $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Можно использовать связь с арктангенсом: $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\pi+\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

Тогда $t=\frac{2\pi}{3}+\pi n$.

Возвращаемся: $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}+\pi n$.

Переносим: $\frac{x}{2}=\frac{2\pi}{3}+\pi n-\frac{\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}-\frac{\pi}{6}+\pi n=\frac{\pi}{2}+\pi n$.

Умножаем на 2: $x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Пример 4

Использование связи с арктангенсом

Решим уравнение $\operatorname{ctg}\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)=2$.

$\operatorname{arcctg} 2=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ (так как $2>0$).

Тогда $t=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$.

Возвращаемся: $5x-\frac{\pi}{3}=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$.

$5x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n+\frac{\pi}{3}$.

$x=\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n+\frac{\pi}{3}}{5},\ n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $x=\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3}+\pi n}{5},\ n\in\mathbb{Z}$.

Пример 5

Проверка области определения

Проверим, не попадают ли полученные корни в точки, где котангенс не определён. Например, для уравнения $\operatorname{ctg} 2x=1$ мы получили $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$. При каких n может получиться $2x=\pi m$? Подставим: $2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right)=\frac{\pi}{4}+\pi n$. Это равно πm только если $\frac{\pi}{4}+\pi n=\pi m$, то есть $\pi n-\pi m=-\frac{\pi}{4}$, что невозможно при целых n, m. Значит, все корни допустимы.

Пример 6

Общий алгоритм

При решении уравнения $\operatorname{ctg}(kx+b)=a$:

1. Делаем замену $t=kx+b$.
2. Решаем $\operatorname{ctg} t=a$: $t=\operatorname{arcctg} a+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
3. Возвращаемся к x: $kx+b=\operatorname{arcctg} a+\pi n$.
4. Выражаем x: $x=\frac{\operatorname{arcctg} a+\pi n-b}{k},\ n\in\mathbb{Z}$.
5. При необходимости проверяем, что корни не попадают в точки, где котангенс не определён.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $\operatorname{ctg} 2x=1$

2) $\operatorname{ctg} 3x=\sqrt{3}$

3) $\operatorname{ctg} 4x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

4) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=0$

5) $\operatorname{ctg}\frac{x}{3}=1$

6) $\operatorname{ctg}\frac{x}{4}=-1$

7) $\operatorname{ctg}(x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{3}$

8) $\operatorname{ctg}(x-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{\sqrt{3}}$

9) $\operatorname{ctg}(2x+\frac{\pi}{6})=1$

10) $\operatorname{ctg}(2x-\frac{\pi}{8})=0$

11) $\operatorname{ctg}(3x+\frac{\pi}{5})=\sqrt{3}$

12) $\operatorname{ctg}(3x-\frac{\pi}{7})=\frac{1}{\sqrt{3}}$

2. Решите уравнения:

1) $\operatorname{ctg} 2x = -1$

2) $\operatorname{ctg} 3x = -\sqrt{3}$

3) $\operatorname{ctg} 4x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

4) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -1$

5) $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} = -\sqrt{3}$

6) $\operatorname{ctg} \frac{x}{4} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

7) $\operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{4}) = -1$

8) $\operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$

9) $\operatorname{ctg}(2x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

10) $\operatorname{ctg}(2x - \frac{\pi}{8}) = -1$

11) $\operatorname{ctg}(3x + \frac{\pi}{5}) = -\sqrt{3}$

12) $\operatorname{ctg}(3x - \frac{\pi}{7}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

3. Решите уравнения (с нетабличными значениями):

1) $\operatorname{ctg} 2x = 2$

2) $\operatorname{ctg} 3x = -3$

3) $\operatorname{ctg} 4x = \frac{1}{2}$

4) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -\frac{1}{3}$

5) $\operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{5}) = \frac{5}{4}$

6) $\operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{4}{3}$

7) $\operatorname{ctg}(2x + \frac{\pi}{7}) = \frac{7}{5}$

8) $\operatorname{ctg}(2x - \frac{\pi}{8}) = -\frac{8}{3}$

9) $\operatorname{ctg}(3x + \frac{\pi}{9}) = 0.3$

10) $\operatorname{ctg}(3x - \frac{\pi}{10}) = -0.7$

11) $\operatorname{ctg}(4x + \frac{\pi}{11}) = 0.99$

12) $\operatorname{ctg}(4x - \frac{\pi}{12}) = -0.99$

4. Найдите все корни уравнений на отрезке $[0, 2\pi]$:

1) $\operatorname{ctg} 2x = 1$

2) $\operatorname{ctg} 2x = -1$

3) $\operatorname{ctg} 3x = \sqrt{3}$

4) $\operatorname{ctg} 3x = -\sqrt{3}$

5) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

6) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

7) $\operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{4}) = 0$

8) $\operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{3}) = 1$

9) $\operatorname{ctg}(2x + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$

10) $\operatorname{ctg}(2x - \frac{\pi}{8}) = -\sqrt{3}$

11) $\operatorname{ctg}(3x + \frac{\pi}{5}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

12) $\operatorname{ctg}(3x - \frac{\pi}{7}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

5. Решите уравнения и запишите ответ в градусах:

1) $\operatorname{ctg} 2x = 1$

2) $\operatorname{ctg} 3x = -\sqrt{3}$

3) $\operatorname{ctg} 4x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

4) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 0$

5) $\operatorname{ctg}(x + 30°) = 1$

6) $\operatorname{ctg}(x - 45°) = -\sqrt{3}$

7) $\operatorname{ctg}(2x + 60°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

8) $\operatorname{ctg}(2x - 30°) = 0$

9) $\operatorname{ctg}(3x + 15°) = 1$

10) $\operatorname{ctg}(3x - 75°) = -1$

11) $\operatorname{ctg}(4x + 45°) = \sqrt{3}$

12) $\operatorname{ctg}(4x - 30°) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

6. Задачи повышенной сложности:

1) Найдите все решения уравнения $\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg} x$

2) Найдите все решения уравнения $\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{ctg} x$

3) Найдите все решения уравнения $\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{tg} x$

4) Найдите все решения уравнения $\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$

5) Сколько корней имеет уравнение $\operatorname{ctg} 2x = 1$ на $[0, 2\pi]$?

6) Сколько корней имеет уравнение $\operatorname{ctg} 3x = \sqrt{3}$ на $[0, 2\pi]$?

7) При каких значениях a уравнение $\operatorname{ctg} 2x = a$ имеет ровно 4 корня на $[0, 2\pi]$?

8) При каких значениях a уравнение $\operatorname{ctg} 3x = a$ имеет ровно 6 корней на $[0, 2\pi]$?

9) Решите уравнение $\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg}(2x + \frac{\pi}{3})$

10) Решите уравнение $\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{ctg}(3x - \frac{\pi}{4})$

11) Решите уравнение $\operatorname{ctg} 4x = \operatorname{tg} 4x$

12) Решите уравнение $\operatorname{ctg} 5x = \operatorname{tg} 3x$

Практика по блоку 2

Теория

В этом блоке мы научились решать уравнения вида $\sin(kx+b)=a$, $\cos(kx+b)=a$, $\operatorname{tg}(kx+b)=a$, $\operatorname{ctg}(kx+b)=a$. Основная идея — замена $t=kx+b$, решение простейшего уравнения относительно t, а затем возврат к x.

Напоминание формул:

- $\sin t = a$: $t=(-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n\in\mathbb{Z}$ (при $|a|\le 1$)
- $\cos t = a$: $t=\pm\arccos a + 2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$ (при $|a|\le 1$)
- $\operatorname{tg} t = a$: $t=\operatorname{arctg} a + \pi n$, $n\in\mathbb{Z}$ (при любом a)
- $\operatorname{ctg} t = a$: $t=\operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n\in\mathbb{Z}$ (при любом a)

В этой главе собраны задачи на все эти типы уравнений вперемешку. Ваша задача — определить тип уравнения и применить нужную формулу.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $\sin 2x = \frac{1}{2}$

2) $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\operatorname{tg} 4x = 1$

4) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \sqrt{3}$

5) $\sin(x+\frac{\pi}{4}) = 0$

6) $\cos(x-\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$

7) $\operatorname{tg}(2x+\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

8) $\operatorname{ctg}(2x-\frac{\pi}{8}) = -1$

9) $\sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

10) $\cos 4x = \frac{1}{2}$

11) $\operatorname{tg}\frac{x}{3} = -\sqrt{3}$

12) $\operatorname{ctg}(x+\frac{\pi}{5}) = 0$

2. Решите уравнения:

1) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\cos 3x = -\frac{1}{2}$

3) $\operatorname{tg} 4x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

4) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = -1$

5) $\sin(x+30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (в градусах)

6) $\cos(x-45^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

7) $\operatorname{tg}(2x+60^\circ) = 1$

8) $\operatorname{ctg}(2x-30^\circ) = -\sqrt{3}$

9) $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

10) $\cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

11) $\operatorname{tg}\frac{x}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

12) $\operatorname{ctg}(x+15^\circ) = 0$

3. Решите уравнения (с нетабличными значениями):

1) $\sin 2x = \frac{1}{3}$

2) $\cos 3x = -\frac{2}{3}$

3) $\operatorname{tg} 4x = 2$

4) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = -3$

5) $\sin(x+\frac{\pi}{4}) = 0.4$

6) $\cos(x-\frac{\pi}{6}) = -0.7$

7) $\operatorname{tg}(2x+\frac{\pi}{5}) = \frac{5}{3}$

8) $\operatorname{ctg}(2x-\frac{\pi}{7}) = -\frac{4}{3}$

9) $\sin 3x = \frac{5}{13}$

10) $\cos 4x = -\frac{12}{13}$

11) $\operatorname{tg}\frac{x}{3} = \frac{7}{24}$

12) $\operatorname{ctg}(x+\frac{\pi}{8}) = -\frac{8}{15}$

4. Найдите все корни уравнений на отрезке $[0, 2\pi]$:

1) $\sin 2x = \frac{1}{2}$

2) $\cos 2x = \frac{1}{2}$

3) $\operatorname{tg} 2x = 1$

4) $\operatorname{ctg} 2x = 1$

5) $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

6) $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

7) $\operatorname{tg} 3x = \sqrt{3}$

8) $\operatorname{ctg} 3x = \sqrt{3}$

9) $\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

10) $\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

11) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

12) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

5. Определите, сколько корней имеет уравнение на указанном промежутке:

1) $\sin 2x = \frac{1}{2}$ на $[0, 2\pi]$
2) $\cos 3x = \frac{1}{2}$ на $[0, 2\pi]$
3) $\operatorname{tg} 4x = 1$ на $[0, 2\pi]$
4) $\operatorname{ctg} 2x = \sqrt{3}$ на $[0, 2\pi]$
5) $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ на $[0, 2\pi]$
6) $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ на $[0, 2\pi]$
7) $\operatorname{tg}(2x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ на $[0, 2\pi]$
8) $\operatorname{ctg}(2x - \frac{\pi}{8}) = -1$ на $[0, 2\pi]$
9) $\sin 3x = 0$ на $[0, 2\pi]$
10) $\cos 4x = 1$ на $[0, 2\pi]$
11) $\operatorname{tg} 5x = 0$ на $[0, 2\pi]$
12) $\operatorname{ctg} 6x = 0$ на $[0, 2\pi]$

6. Задачи повышенной сложности:

1) Найдите все решения уравнения $\sin 2x = \sin x$
2) Найдите все решения уравнения $\cos 2x = \cos x$
3) Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$
4) Найдите все решения уравнения $\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg} x$
5) Найдите все решения уравнения $\sin 3x = \cos x$
6) Найдите все решения уравнения $\cos 3x = \sin x$
7) Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{ctg} x$
8) Найдите все решения уравнения $\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} x$
9) Решите уравнение $\sin 2x = \cos 2x$
10) Решите уравнение $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{ctg} 3x$
11) Решите уравнение $\sin 4x + \cos 4x = 0$
12) Решите уравнение $\operatorname{tg} 5x - \operatorname{ctg} 5x = 0$

Вынесение общего множителя

Теория

В этой главе мы рассмотрим один из самых простых способов решения тригонометрических уравнений — вынесение общего множителя за скобки. Этот метод применяется, когда уравнение можно представить в виде произведения, равного нулю.

Основная идея: Если уравнение имеет вид $f(x) \cdot g(x) = 0$, то оно равносильно совокупности:

$$f(x) = 0 \quad \text{или} \quad g(x) = 0$$

Примеры ситуаций, где применяется:

- $\sin x \cdot \cos x = 0$
- $\sin x \cdot \operatorname{tg} x = 0$
- $\sin x \cdot (2\cos x - 1) = 0$
- $\cos x \cdot (3\sin x + 2) = 0$
- и т.д.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Произведение синуса и косинуса

Решим уравнение $\sin x \cos x = 0$.

Произведение равно нулю, значит:

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad \cos x = 0$$

Решаем каждое уравнение:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k, \ k \in \mathbb{Z}$$
$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$$

Объединяя решения, получаем: $x = \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$ (так как при чётных m получаем корни из первой серии, при нечётных — из второй).

Ответ: $x = \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Пример 2

Произведение синуса и тангенса

Решим уравнение $\sin x \cdot \operatorname{tg} x = 0$.

Произведение равно нулю, значит:

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} x = 0$$

Решаем:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$$

Обе серии дают одни и те же корни $x = \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Пример 3

Более сложный множитель

Решим уравнение $\sin x \cdot (2\cos x - 1) = 0$.

Произведение равно нулю, значит:

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad 2\cos x - 1 = 0$$

Из первого: $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Из второго: $2\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \pi k$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4

Уравнение с вынесением общего множителя

Решим уравнение $\sin^2 x - \sin x = 0$.
Вынесем $\sin x$ за скобки:

$$\sin x(\sin x - 1) = 0$$

Произведение равно нулю, значит:

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad \sin x - 1 = 0$$

Из первого: $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Из второго: $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \pi k$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 5

Уравнение с косинусом

Решим уравнение $\cos^2 x - 2\cos x = 0$.
Вынесем $\cos x$:

$$\cos x(\cos x - 2) = 0$$

Произведение равно нулю, значит:

$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad \cos x - 2 = 0$$

Из первого: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Из второго: $\cos x = 2$ — решений нет, так как $|2| > 1$.
Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 6

Уравнение с тангенсом

Решим уравнение $\operatorname{tg} x \cdot \sin 2x = 0$.
Произведение равно нулю, значит:

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad \text{или} \quad \sin 2x = 0$$

Из первого: $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Из второго: $\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi n \Rightarrow x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.
Объединяя, получаем $x = \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$ (проверьте, что все корни из первой серии входят во вторую).
Ответ: $x = \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Пример 7

Общий алгоритм

При решении уравнений методом вынесения общего множителя:

1. Приводим уравнение к виду $f(x) \cdot g(x) = 0$.
2. Решаем каждое уравнение $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ отдельно.
3. Объединяем полученные решения.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $\sin x \cos x = 0$

2) $\sin x \operatorname{tg} x = 0$

3) $\cos x \operatorname{ctg} x = 0$

4) $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 0$ (обратите внимание на ОДЗ)

5) $\sin x(2\cos x - 1) = 0$

6) $\cos x(2\sin x + 1) = 0$

7) $\operatorname{tg} x(3\sin x - 2) = 0$

8) $\operatorname{ctg} x(2\cos x + \sqrt{3}) = 0$

9) $\sin^2 x - \sin x = 0$

10) $\cos^2 x - \cos x = 0$

11) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$

12) $\operatorname{ctg}^2 x - 3\operatorname{ctg} x = 0$

2. Решите уравнения:

1) $\sin x \cos 2x = 0$

2) $\cos x \sin 2x = 0$

3) $\operatorname{tg} x \cos 2x = 0$

4) $\operatorname{ctg} x \sin 2x = 0$

5) $\sin 2x \cos 3x = 0$

6) $\cos 2x \sin 3x = 0$

7) $\sin x \cos x \cos 2x = 0$

8) $\sin x \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 0$

9) $\sin^2 x - 2\sin x = 0$

10) $\cos^2 x - 3\cos x = 0$

11) $2\sin^2 x - \sin x = 0$

12) $3\cos^2 x - 2\cos x = 0$

3. Решите уравнения, предварительно разложив на множители:

1) $\sin x \cos x - \sin x = 0$

2) $\cos x \sin x - \cos x = 0$

3) $\sin x \operatorname{tg} x - \sin x = 0$

4) $\cos x \operatorname{ctg} x - \cos x = 0$

5) $\sin^2 x + \sin x = 0$

6) $\cos^2 x + \cos x = 0$

7) $\sin^2 x - 3\sin x = 0$

8) $\cos^2 x - 2\cos x = 0$

9) $\sin 2x \sin x - \sin 2x = 0$

10) $\cos 2x \cos x - \cos 2x = 0$

11) $\operatorname{tg} x \sin 2x - \operatorname{tg} x = 0$

12) $\operatorname{ctg} x \cos 2x - \operatorname{ctg} x = 0$

4. Найдите все корни уравнений на отрезке $[0, 2\pi]$:

1) $\sin x \cos x = 0$

2) $\sin x(2\cos x - 1) = 0$

3) $\cos x(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$

4) $\sin^2 x - \sin x = 0$

5) $\cos^2 x - \frac{1}{2}\cos x = 0$

6) $\sin 2x \cos x = 0$

7) $\cos 2x \sin x = 0$

8) $\sin x \cos 2x = 0$

9) $\sin x - \sin x \cos x = 0$

10) $\cos x - \cos x \sin x = 0$

11) $\sin^2 x - 2\sin x = 0$

12) $\cos^2 x - 3\cos x = 0$

5. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $\sin 2x \cos x - \sin x \cos 2x = 0$ (подсказка: это $\sin(2x - x) = \sin x$)

2) $\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = 0$ (это $\cos(2x + x) = \cos 3x$)

3) $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x = 0$

4) $\cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x = 0$

5) $\sin 4x \cos 2x - \cos 4x \sin 2x = 0$

6) $\cos 4x \cos 2x + \sin 4x \sin 2x = 0$

7) $\sin 5x \sin x + \cos 5x \cos x = 1$

8) $\sin 5x \cos x - \cos 5x \sin x = 0$

9) $\sin^3 x - \sin x = 0$

10) $\cos^3 x - \cos x = 0$

11) $\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x = 0$

12) $\operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x = 0$

Группировка

Теория

В этой главе мы рассмотрим более сложный способ разложения на множители — метод группировки. Он применяется, когда уравнение содержит несколько слагаемых, и можно сгруппировать их так, чтобы в каждой группе появился общий множитель, а затем вынести общую скобку.

Основная идея:

1. Группируем слагаемые (обычно по два-три).
2. В каждой группе выносим общий множитель.
3. Если после этого появилась одинаковая скобка, выносим её за скобки.
4. Получаем уравнение вида $f(x) \cdot g(x) = 0$.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Группировка по два слагаемых

Решим уравнение $\sin x + \sin 2x + \sin x \sin 2x + 1 = 0$.

Сгруппируем первое с третьим и второе с четвёртым:

$$(\sin x + \sin x \sin 2x) + (\sin 2x + 1) = 0$$

В первой группе выносим $\sin x$, во второй — ничего не выносим (но можно заметить, что 1 не даёт общего множителя). Однако здесь лучше сгруппировать иначе.

Попробуем другой способ: сгруппируем первое со вторым и третье с четвёртым:

$$(\sin x + \sin 2x) + (\sin x \sin 2x + 1) = 0$$

В первой группе общего множителя нет. Во второй тоже. Неудача.

Ещё вариант: сгруппируем первое с четвёртым и второе с третьим:

$$(\sin x + 1) + (\sin 2x + \sin x \sin 2x) = 0$$

Во второй группе выносим $\sin 2x$:

$$(\sin x + 1) + \sin 2x(1 + \sin x) = 0$$

Теперь есть общая скобка $(\sin x + 1)$. Выносим её:

$$(\sin x + 1)(1 + \sin 2x) = 0$$

Произведение равно нулю, значит:

$$\sin x + 1 = 0 \quad \text{или} \quad 1 + \sin 2x = 0$$

Решаем:

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 2x = -1 \Rightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2

Группировка в тригонометрическом уравнении

Решим уравнение $\sin 2x + \sin x + \cos 2x + \cos x = 0$.

Сгруппируем первое со вторым и третье с четвёртым:

$$(\sin 2x + \sin x) + (\cos 2x + \cos x) = 0$$

Преобразуем суммы в произведения:

$$2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$$

$$2\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2}\right) = 0$$

Произведение равно нулю, значит:

$$\cos\frac{x}{2} = 0 \quad \text{или} \quad \sin\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} = 0$$

Из первого: $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
Из второго: $\sin\frac{3x}{2} = -\cos\frac{3x}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{3x}{2} = -1 \Rightarrow \frac{3x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi n \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \pi + 2\pi k,\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3},\ k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 3

Уравнение с вынесением после группировки

Решим уравнение $\sin x + \operatorname{tg} x = 0$.
Запишем $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Получаем:

$$\sin x + \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

$$\sin x\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) = 0$$

Произведение равно нулю, значит:

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad 1 + \frac{1}{\cos x} = 0$$

Из первого: $x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Из второго: $\frac{1}{\cos x} = -1 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Вторая серия является подмножеством первой (при $k = 2n+1$). Поэтому ответ: $x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ (но нужно проверить, не теряем ли мы что-то).

Проверим ОДЗ: тангенс определён при $\cos x \neq 0$. При $x = \pi k$ это условие выполняется (кроме $k = \frac{1}{2} + m$, но таких целых k нет).

Ответ: $x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Пример 4

Ещё один пример группировки

Решим уравнение $\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 0$.
Преобразуем разность синусов в произведение:

$$\sin 3x - \sin x = 2\cos 2x \sin x$$

Тогда уравнение принимает вид:

$$2\cos 2x \sin x + \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x(2\sin x + 1) = 0$$

Произведение равно нулю, значит:

$$\cos 2x = 0 \quad \text{или} \quad 2\sin x + 1 = 0$$

Из первого: $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$. Из второго: $\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 5

Общий алгоритм

При решении уравнений методом группировки:

1. Пробуем различные способы группировки слагаемых.
2. В каждой группе выносим общий множитель.
3. Ищем общую скобку и выносим её.
4. Решаем полученные простейшие уравнения.

Задачи

1. Решите уравнения методом группировки:

1) $\sin x + \sin 2x + \sin x \sin 2x + 1 = 0$

2) $\cos x + \cos 2x + \cos x \cos 2x + 1 = 0$

3) $\sin 2x + \sin x + \cos 2x + \cos x = 0$

4) $\sin 2x - \sin x + \cos 2x - \cos x = 0$

5) $\sin 3x + \sin x + \cos 3x + \cos x = 0$

6) $\sin 3x - \sin x + \cos 3x - \cos x = 0$

7) $\sin x + \operatorname{tg} x = 0$

8) $\cos x + \operatorname{ctg} x = 0$

9) $\sin x + \operatorname{tg} x + \sin x \operatorname{tg} x + 1 = 0$

10) $\cos x + \operatorname{ctg} x + \cos x \operatorname{ctg} x + 1 = 0$

11) $\sin 2x + \cos x + \sin x + \cos 2x = 0$

12) $\sin 2x - \cos x + \sin x - \cos 2x = 0$

2. Решите уравнения, используя преобразование суммы в произведение перед группировкой:

1) $\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 0$

2) $\sin 3x + \sin x + \cos 2x = 0$

3) $\cos 3x - \cos x + \sin 2x = 0$

4) $\cos 3x + \cos x + \sin 2x = 0$

5) $\sin 4x - \sin 2x + \cos 3x = 0$

6) $\sin 4x + \sin 2x + \cos 3x = 0$

7) $\cos 4x - \cos 2x + \sin 3x = 0$

8) $\cos 4x + \cos 2x + \sin 3x = 0$

9) $\sin 5x + \sin x + \cos 3x = 0$

10) $\sin 5x - \sin x + \cos 3x = 0$

11) $\cos 5x + \cos x + \sin 3x = 0$

12) $\cos 5x - \cos x + \sin 3x = 0$

3. Найдите все корни уравнений на отрезке $[0, 2\pi]$:

1) $\sin x + \sin 2x + \sin x \sin 2x + 1 = 0$

2) $\sin 2x + \sin x + \cos 2x + \cos x = 0$

3) $\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 0$

4) $\sin x + \operatorname{tg} x = 0$

5) $\cos x + \operatorname{ctg} x = 0$

6) $\sin x + \operatorname{tg} x + \sin x \operatorname{tg} x + 1 = 0$

7) $\sin 3x + \sin x + \cos 3x + \cos x = 0$

8) $\sin 3x - \sin x + \cos 3x - \cos x = 0$

9) $\sin 4x - \sin 2x + \cos 3x = 0$

10) $\sin 4x + \sin 2x + \cos 3x = 0$

11) $\cos 4x - \cos 2x + \sin 3x = 0$

12) $\cos 4x + \cos 2x + \sin 3x = 0$

4. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 0$

2) $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0$

3) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$

4) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$

5) $\sin x + \sin 2x = \sin 3x + \sin 4x$

6) $\cos x + \cos 2x = \cos 3x + \cos 4x$

7) $\sin x + \sin 3x = \sin 2x + \sin 4x$

8) $\cos x + \cos 3x = \cos 2x + \cos 4x$

9) $\sin x \sin 3x + \cos x \cos 3x = \frac{1}{2}$

10) $\sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

11) $\sin x \sin 2x + \cos x \cos 2x = \frac{1}{2}$

12) $\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Использование формул преобразования суммы в произведение

Теория

В этой главе мы рассмотрим уравнения, которые решаются с помощью формул преобразования суммы или разности тригонометрических функций в произведение. Эти формулы позволяют разложить левую часть уравнения на множители.

Основные формулы:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Типичные уравнения:

- $\sin x + \sin y = 0$
- $\sin x - \sin y = 0$
- $\cos x + \cos y = 0$
- $\cos x - \cos y = 0$
- более сложные комбинации

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Уравнение $\sin x + \sin 3x = 0$

Решим уравнение $\sin x + \sin 3x = 0$.

Преобразуем сумму в произведение:

$$2\sin\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2} = 2\sin 2x\cos(-x) = 2\sin 2x\cos x = 0$$

Произведение равно нулю, значит:

$$\sin 2x = 0 \quad \text{или} \quad \cos x = 0$$

Из первого: $2x = \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Из второго: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что корни второго уравнения входят в первое (при $k = 2n+1$). Поэтому ответ можно записать как $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 2

Уравнение $\sin 5x - \sin 3x = 0$

Решим уравнение $\sin 5x - \sin 3x = 0$.

Преобразуем разность в произведение:

$$2\sin\frac{5x-3x}{2}\cos\frac{5x+3x}{2} = 2\sin x\cos 4x = 0$$

Произведение равно нулю, значит:

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad \cos 4x = 0$$

Из первого: $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Из второго: $4x = \frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \pi k$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 3

Уравнение $\cos 2x + \cos 4x = 0$

Решим уравнение $\cos 2x + \cos 4x = 0$.
Преобразуем сумму в произведение:

$$2\cos\frac{2x+4x}{2}\cos\frac{2x-4x}{2} = 2\cos 3x\cos(-x) = 2\cos 3x\cos x = 0$$

Произведение равно нулю, значит:

$$\cos 3x = 0 \quad \text{или} \quad \cos x = 0$$

Из первого: $3x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. Из второго: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4

Уравнение $\cos 5x - \cos 3x = 0$

Решим уравнение $\cos 5x - \cos 3x = 0$.
Преобразуем разность в произведение:

$$-2\sin\frac{5x+3x}{2}\sin\frac{5x-3x}{2} = -2\sin 4x\sin x = 0$$

Произведение равно нулю, значит:

$$\sin 4x = 0 \quad \text{или} \quad \sin x = 0$$

Из первого: $4x = \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi k}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$. Из второго: $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Корни второго уравнения входят в первое (при $k = 4n$), поэтому ответ: $x = \frac{\pi k}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \frac{\pi k}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 5

Уравнение с разными функциями

Решим уравнение $\sin 2x + \sin 4x = \sin 3x$.
Перенесём всё в левую часть:

$$\sin 2x + \sin 4x - \sin 3x = 0$$

Преобразуем сумму первых двух слагаемых:

$$2\sin\frac{2x+4x}{2}\cos\frac{2x-4x}{2} - \sin 3x = 2\sin 3x\cos(-x) - \sin 3x = 2\sin 3x\cos x - \sin 3x = 0$$

$$\sin 3x(2\cos x - 1) = 0$$

Произведение равно нулю, значит:

$$\sin 3x = 0 \quad \text{или} \quad 2\cos x - 1 = 0$$

Из первого: $3x = \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. Из второго: $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \frac{\pi k}{3}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 6

Общий алгоритм

При решении уравнений с помощью формул преобразования суммы в произведение:

1. Применяем соответствующую формулу к суммам или разностям тригонометрических функций.
2. Получаем произведение, равное нулю.
3. Решаем каждое из получившихся простейших уравнений.
4. Объединяем решения.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $\sin x + \sin 3x = 0$

2) $\sin 2x + \sin 4x = 0$

3) $\sin 3x + \sin 5x = 0$

4) $\sin x - \sin 3x = 0$

5) $\sin 2x - \sin 4x = 0$

6) $\sin 3x - \sin 5x = 0$

7) $\cos x + \cos 3x = 0$

8) $\cos 2x + \cos 4x = 0$

9) $\cos 3x + \cos 5x = 0$

10) $\cos x - \cos 3x = 0$

11) $\cos 2x - \cos 4x = 0$

12) $\cos 3x - \cos 5x = 0$

2. Решите уравнения:

1) $\sin x + \sin 2x = 0$

2) $\sin 2x + \sin 3x = 0$

3) $\sin 3x + \sin 4x = 0$

4) $\sin x - \sin 2x = 0$

5) $\sin 2x - \sin 3x = 0$

6) $\sin 3x - \sin 4x = 0$

7) $\cos x + \cos 2x = 0$

8) $\cos 2x + \cos 3x = 0$

9) $\cos 3x + \cos 4x = 0$

10) $\cos x - \cos 2x = 0$

11) $\cos 2x - \cos 3x = 0$

12) $\cos 3x - \cos 4x = 0$

3. Решите уравнения, содержащие смешанные функции:

1) $\sin 2x + \sin 4x = \sin 3x$

2) $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$

3) $\sin x + \sin 3x = \sin 2x$

4) $\cos 2x + \cos 4x = \cos 3x$

5) $\cos 3x + \cos 5x = \cos 4x$

6) $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$

7) $\sin 2x - \sin 4x = \sin 3x$

8) $\sin 3x - \sin 5x = \sin 4x$

9) $\sin x - \sin 3x = \sin 2x$

10) $\cos 2x - \cos 4x = \cos 3x$

11) $\cos 3x - \cos 5x = \cos 4x$

12) $\cos x - \cos 3x = \cos 2x$

4. Найдите все корни уравнений на отрезке $[0, 2\pi]$:

1) $\sin x + \sin 3x = 0$

2) $\sin 2x + \sin 4x = 0$

3) $\cos x + \cos 3x = 0$

4) $\cos 2x + \cos 4x = 0$

5) $\sin x - \sin 3x = 0$

6) $\sin 2x - \sin 4x = 0$

7) $\cos x - \cos 3x = 0$

8) $\cos 2x - \cos 4x = 0$

9) $\sin 2x + \sin 4x = \sin 3x$

10) $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$

11) $\cos 2x + \cos 4x = \cos 3x$

12) $\cos 3x + \cos 5x = \cos 4x$

5. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$

2) $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$

3) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

4) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

5) $\sin x + \sin 3x = \sin 2x + \sin 4x$

6) $\cos x + \cos 3x = \cos 2x + \cos 4x$

7) $\sin x + \sin 2x = \sin 3x + \sin 4x$

8) $\cos x + \cos 2x = \cos 3x + \cos 4x$

9) $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = 0$

10) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0$

11) $\sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 0$

12) $\cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0$

Практика по блоку 3

Теория

В этом блоке мы изучили методы решения тригонометрических уравнений, основанные на разложении на множители:

- Вынесение общего множителя (глава 12)
- Группировка (глава 13)
- Использование формул преобразования суммы в произведение (глава 14)

Основная идея всех этих методов — привести уравнение к виду $f(x) \cdot g(x) = 0$, а затем решить каждое из получившихся простейших уравнений отдельно.

В этой главе собраны задачи на все эти методы вперемешку. Ваша задача — определить, какой способ разложения на множители нужно применить в каждом конкретном случае.

Задачи

1. Решите уравнения методом вынесения общего множителя:

1) $\sin x \cos x = 0$
2) $\sin x(2\cos x - 1) = 0$
3) $\cos x(2\sin x + \sqrt{3}) = 0$
4) $\sin^2 x - \sin x = 0$
5) $\cos^2 x - 2\cos x = 0$
6) $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x = 0$
7) $\sin 2x \cos x = 0$
8) $\cos 2x \sin x = 0$
9) $\sin x \cos 2x - \sin x = 0$
10) $\cos x \sin 2x - \cos x = 0$
11) $\sin x \operatorname{tg} x - \sin x = 0$
12) $\cos x \operatorname{ctg} x - \cos x = 0$

2. Решите уравнения методом группировки:

1) $\sin x + \sin 2x + \sin x \sin 2x + 1 = 0$
2) $\cos x + \cos 2x + \cos x \cos 2x + 1 = 0$
3) $\sin 2x + \sin x + \cos 2x + \cos x = 0$
4) $\sin 2x - \sin x + \cos 2x - \cos x = 0$
5) $\sin x + \operatorname{tg} x = 0$
6) $\cos x + \operatorname{ctg} x = 0$
7) $\sin x + \operatorname{tg} x + \sin x \operatorname{tg} x + 1 = 0$
8) $\cos x + \operatorname{ctg} x + \cos x \operatorname{ctg} x + 1 = 0$
9) $\sin 3x + \sin x + \cos 3x + \cos x = 0$
10) $\sin 3x - \sin x + \cos 3x - \cos x = 0$
11) $\sin x + \sin 2x = \cos x + \cos 2x$
12) $\sin x - \sin 2x = \cos x - \cos 2x$

3. Решите уравнения с помощью формул преобразования суммы в произведение:

1) $\sin x + \sin 3x = 0$
2) $\sin 2x + \sin 4x = 0$
3) $\cos x + \cos 3x = 0$
4) $\cos 2x + \cos 4x = 0$
5) $\sin x - \sin 3x = 0$
6) $\sin 2x - \sin 4x = 0$
7) $\cos x - \cos 3x = 0$
8) $\cos 2x - \cos 4x = 0$
9) $\sin 2x + \sin 4x = \sin 3x$
10) $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$
11) $\cos 2x + \cos 4x = \cos 3x$
12) $\cos 3x + \cos 5x = \cos 4x$

4. Решите уравнения, определив подходящий метод:

1) $\sin 2x + \sin x = 0$
2) $\cos 2x + \cos x = 0$
3) $\sin 3x - \sin x = 0$
4) $\cos 3x - \cos x = 0$
5) $\sin x \sin 2x - \sin x = 0$
6) $\cos x \cos 2x - \cos x = 0$
7) $\sin x \cos x - \frac{1}{2} = 0$ (здесь нужно другое)
8) $\sin^2 x - \cos^2 x = 0$ (формула разности квадратов)
9) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$
10) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

11) $\sin 2x + \sin 4x = \sin 3x + \sin x$

12) $\cos 2x + \cos 4x = \cos 3x + \cos x$

5. Найдите все корни уравнений на отрезке $[0, 2\pi]$:

1) $\sin x \cos x = 0$

2) $\sin x + \sin 3x = 0$

3) $\sin 2x + \sin x + \cos 2x + \cos x = 0$

4) $\sin^2 x - \sin x = 0$

5) $\cos 2x + \cos 4x = 0$

6) $\sin x + \operatorname{tg} x = 0$

7) $\sin 2x + \sin 4x = \sin 3x$

8) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

9) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

10) $\sin x \sin 2x - \sin x = 0$

11) $\sin x - \sin 2x + \cos x - \cos 2x = 0$

12) $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$

6. Задачи повышенной сложности:

1) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 0$

2) $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0$

3) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$

4) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$

5) $\sin x \sin 3x + \cos x \cos 3x = \frac{1}{2}$

6) $\sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

7) $\sin 2x \sin 4x + \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{2}$

8) $\sin 2x \cos 4x + \cos 2x \sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

9) $\sin^3 x - \sin x = 0$

10) $\cos^3 x - \cos x = 0$

11) $\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x = 0$

12) $\operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x = 0$

Замена $t = \sin x$

Теория

В этой главе мы рассмотрим уравнения, которые сводятся к квадратным с помощью замены $t = \sin x$. Такие уравнения обычно имеют вид:

$$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$$

где $a \neq 0$.

Метод решения:

1. Делаем замену $t = \sin x$, где $t \in [-1, 1]$.
2. Получаем квадратное уравнение $at^2 + bt + c = 0$.
3. Решаем его относительно t.
4. Для каждого корня t, удовлетворяющего условию $|t| \leq 1$, решаем уравнение $\sin x = t$.
5. Записываем ответ.

Важное замечание: Корни t, не попадающие в отрезок $[-1, 1]$, отбрасываются, так как синус не может принимать такие значения.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простое квадратное уравнение

Решим уравнение $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$.

Делаем замену $t = \sin x$, $|t| \leq 1$:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4} = 1 \text{ и } \frac{1}{2}$$

Оба корня удовлетворяют условию $|t| \leq 1$.

Возвращаемся к x:

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2

Уравнение с отрицательным дискриминантом

Решим уравнение $3\sin^2 x - 2\sin x + 2 = 0$.

Замена $t = \sin x$:

$$3t^2 - 2t + 2 = 0$$

$$D = 4 - 24 = -20 < 0$$

Дискриминант отрицательный, значит, действительных корней нет, и исходное уравнение не имеет решений.

Ответ: корней нет.

Пример 3

Корень не попадает в $[-1, 1]$

Решим уравнение $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$.

Замена $t = \sin x$:

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = 2 \text{ и } \frac{1}{2}$$

$t = 2$ не удовлетворяет условию $|t| \leq 1$, отбрасываем. $t = \frac{1}{2}$ подходит.
Возвращаемся: $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4

Уравнение с приведением к квадратному

Решим уравнение $\cos 2x + 3\sin x - 2 = 0$.
Используем формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$:

$$1 - 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$-2\sin^2 x + 3\sin x - 1 = 0$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$

Мы получили уравнение из примера 1. Далее решаем аналогично.
Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 5

Уравнение с параметром

Решим уравнение $\sin^2 x + a\sin x - 2a = 0$ при различных значениях a.
Замена $t = \sin x$, $|t| \leq 1$:

$$t^2 + at - 2a = 0$$

$$D = a^2 + 8a = a(a+8)$$

Корни: $t = \frac{-a \pm \sqrt{a(a+8)}}{2}$.
Исследование проводим в зависимости от a, но это уже сложнее.

Пример 6

Общий алгоритм

При решении уравнений с заменой $t = \sin x$:

1. Приводим уравнение к виду $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$ (используя тригонометрические формулы, если нужно).
2. Делаем замену $t = \sin x$, $|t| \leq 1$.
3. Решаем квадратное уравнение $at^2 + bt + c = 0$.
4. Отбираем корни $t \in [-1, 1]$.
5. Для каждого такого t решаем $\sin x = t$.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

2) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$

3) $3\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$

4) $4\sin^2 x - 3\sin x - 1 = 0$

5) $\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$

6) $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$

7) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

8) $3\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0$

9) $4\sin^2 x + 4\sin x + 1 = 0$

10) $9\sin^2 x - 6\sin x + 1 = 0$

11) $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$

12) $\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0$

2. Решите уравнения, предварительно приведя их к квадратным относительно $\sin x$:

1) $\cos 2x + 3\sin x - 2 = 0$

2) $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$

3) $\cos 2x + \sin x + 1 = 0$

4) $\cos 2x - 2\sin x - 1 = 0$

5) $2\cos 2x + 3\sin x - 3 = 0$

6) $3\cos 2x - 4\sin x - 2 = 0$

7) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$ (здесь нужно выразить $\sin^2 x$ через $\cos x$)

8) $3\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$

9) $\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$

10) $\sin^2 x + \cos x - 2 = 0$

11) $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$

12) $3\sin^2 x + \cos x - 2 = 0$

3. Найдите все корни уравнений на отрезке $[0, 2\pi]$:

1) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

2) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$

3) $\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$

4) $\cos 2x + 3\sin x - 2 = 0$

5) $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$

6) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$

7) $3\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$

8) $\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$

9) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

10) $3\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0$

11) $4\sin^2 x + 4\sin x + 1 = 0$

12) $9\sin^2 x - 6\sin x + 1 = 0$

4. Решите уравнения с параметрами (для каждого значения параметра найдите все решения):

1) $\sin^2 x + a\sin x = 0$

2) $\sin^2 x - a\sin x = 0$

3) $2\sin^2 x + a\sin x - 1 = 0$

4) $\sin^2 x + a\sin x + 1 = 0$ (при каких a есть решения?)

5) $\sin^2 x - 2\sin x + a = 0$

6) $\sin^2 x + 2\sin x + a = 0$

7) $\cos 2x + a\sin x = 0$

8) $\cos 2x - a\sin x = 0$

9) $a\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

10) $a\sin^2 x - \sin x + 1 = 0$

11) $\sin^2 x + a\sin x + a = 0$

12) $\sin^2 x - a\sin x - a = 0$

5. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $\sin^4 x - 5\sin^2 x + 4 = 0$ (биквадратное уравнение)

2) $\sin^4 x - 3\sin^2 x + 2 = 0$

3) $\sin^6 x - 7\sin^3 x + 6 = 0$ (замена $t = \sin^3 x$)

4) $\sin^3 x - \sin^2 x - 2\sin x = 0$ (вынесение $\sin x$)

5) $\sin^3 x - 2\sin^2 x - \sin x + 2 = 0$ (группировка)

6) $\sin^3 x + \sin^2 x - 2\sin x = 0$

7) $\sin^3 x + 2\sin^2 x - 3\sin x = 0$

8) $\sin^3 x - \sin x = 0$

9) $\sin^3 x + \sin x = 0$

10) $\sin^4 x - \sin^2 x = 0$

11) $\sin^4 x + \sin^2 x = 0$

12) $\sin^6 x - \sin^2 x = 0$

Замена $t = \cos x$

Теория

В этой главе мы рассмотрим уравнения, которые сводятся к квадратным с помощью замены $t = \cos x$. Такие уравнения обычно имеют вид:

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$$

где $a \neq 0$.

Метод решения:

1. Делаем замену $t = \cos x$, где $t \in [-1, 1]$.
2. Получаем квадратное уравнение $at^2 + bt + c = 0$.
3. Решаем его относительно t.
4. Для каждого корня t, удовлетворяющего условию $|t| \leq 1$, решаем уравнение $\cos x = t$.
5. Записываем ответ.

Важное замечание: Корни t, не попадающие в отрезок $[-1, 1]$, отбрасываются, так как косинус не может принимать такие значения.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простое квадратное уравнение

Решим уравнение $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$.

Делаем замену $t = \cos x$, $|t| \leq 1$:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4} = 1 \text{ и } \frac{1}{2}$$

Оба корня удовлетворяют условию $|t| \leq 1$.

Возвращаемся к x:

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = 2\pi k$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2

Уравнение с отрицательным дискриминантом

Решим уравнение $3\cos^2 x - 2\cos x + 2 = 0$.

Замена $t = \cos x$:

$$3t^2 - 2t + 2 = 0$$

$$D = 4 - 24 = -20 < 0$$

Дискриминант отрицательный, значит, действительных корней нет, и исходное уравнение не имеет решений.

Ответ: корней нет.

Пример 3

Корень не попадает в $[-1, 1]$

Решим уравнение $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$.

Замена $t = \cos x$:

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$
$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = 2 \text{ и } \frac{1}{2}$$

$t = 2$ не удовлетворяет условию $|t| \le 1$, отбрасываем. $t = \frac{1}{2}$ подходит.
Возвращаемся: $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4

Уравнение с приведением к квадратному

Решим уравнение $\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$.
Используем формулу $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$$1 - \cos^2 x + 3\cos x - 3 = 0$$
$$-\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$
$$\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$$

Замена $t = \cos x$:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$
$$D = 9 - 8 = 1$$
$$t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = 2 \text{ и } 1$$

$t = 2$ отбрасываем, $t = 1$ подходит.
$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 5

Уравнение с параметром

Решим уравнение $\cos^2 x + a\cos x - 2a = 0$ при различных значениях a.
Замена $t = \cos x$, $|t| \le 1$:

$$t^2 + at - 2a = 0$$
$$D = a^2 + 8a = a(a + 8)$$

Корни: $t = \frac{-a \pm \sqrt{a(a+8)}}{2}$.
Исследование проводим в зависимости от a, но это уже сложнее.

Пример 6

Общий алгоритм

При решении уравнений с заменой $t = \cos x$:

1. Приводим уравнение к виду $a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$ (используя тригонометрические формулы, если нужно).
2. Делаем замену $t = \cos x$, $|t| \le 1$.
3. Решаем квадратное уравнение $at^2 + bt + c = 0$.
4. Отбираем корни $t \in [-1, 1]$.
5. Для каждого такого t решаем $\cos x = t$.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

2) $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$

3) $3\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$

4) $4\cos^2 x - 3\cos x - 1 = 0$

5) $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$

6) $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$

7) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

8) $3\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$

9) $4\cos^2 x + 4\cos x + 1 = 0$

10) $9\cos^2 x - 6\cos x + 1 = 0$

11) $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$

12) $\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0$

2. Решите уравнения, предварительно приведя их к квадратным относительно $\cos x$:

1) $\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$

2) $\sin^2 x - 5\cos x - 3 = 0$

3) $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$

4) $\sin^2 x - 2\cos x - 1 = 0$

5) $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$

6) $3\sin^2 x - 4\cos x - 2 = 0$

7) $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$ (здесь нужно выразить $\cos^2 x$ через $\sin x$)

8) $3\cos^2 x - 2\sin x + 2 = 0$

9) $\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$

10) $\cos^2 x + \sin x - 2 = 0$

11) $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$

12) $3\cos^2 x + \sin x - 2 = 0$

3. Найдите все корни уравнений на отрезке $[0, 2\pi]$:

1) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

2) $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$

3) $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$

4) $\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$

5) $\sin^2 x - 5\cos x - 3 = 0$

6) $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$

7) $3\cos^2 x - 2\sin x + 2 = 0$

8) $\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$

9) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

10) $3\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$

11) $4\cos^2 x + 4\cos x + 1 = 0$

12) $9\cos^2 x - 6\cos x + 1 = 0$

4. Решите уравнения с параметрами (для каждого значения параметра найдите все решения):

1) $\cos^2 x + a\cos x = 0$

2) $\cos^2 x - a\cos x = 0$

3) $2\cos^2 x + a\cos x - 1 = 0$

4) $\cos^2 x + a\cos x + 1 = 0$ (при каких a есть решения?)

5) $\cos^2 x - 2\cos x + a = 0$

6) $\cos^2 x + 2\cos x + a = 0$

7) $\sin^2 x + a\cos x = 0$

8) $\sin^2 x - a\cos x = 0$

9) $a\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

10) $a\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

11) $\cos^2 x + a\cos x + a = 0$

12) $\cos^2 x - a\cos x - a = 0$

5. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $\cos^4 x - 5\cos^2 x + 4 = 0$ (биквадратное уравнение)

2) $\cos^4 x - 3\cos^2 x + 2 = 0$

3) $\cos^6 x - 7\cos^3 x + 6 = 0$ (замена $t = \cos^3 x$)

4) $\cos^3 x - \cos^2 x - 2\cos x = 0$ (вынесение $\cos x$)

5) $\cos^3 x - 2\cos^2 x - \cos x + 2 = 0$ (группировка)

6) $\cos^3 x + \cos^2 x - 2\cos x = 0$

7) $\cos^3 x + 2\cos^2 x - 3\cos x = 0$

8) $\cos^3 x - \cos x = 0$

9) $\cos^3 x + \cos x = 0$

10) $\cos^4 x - \cos^2 x = 0$

11) $\cos^4 x + \cos^2 x = 0$

12) $\cos^6 x - \cos^2 x = 0$

Замена $t = \operatorname{tg} x$

Теория

В этой главе мы рассмотрим уравнения, которые сводятся к квадратным с помощью замены $t = \operatorname{tg} x$. Такие уравнения обычно имеют вид:

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$$

где $a \neq 0$.

Метод решения:

1. Делаем замену $t = \operatorname{tg} x$. В отличие от синуса и косинуса, тангенс может принимать любые действительные значения, поэтому ограничений на t нет.
2. Получаем квадратное уравнение $at^2 + bt + c = 0$.
3. Решаем его относительно t.
4. Для каждого корня t решаем уравнение $\operatorname{tg} x = t$.
5. Записываем ответ.

Важное замечание: При решении уравнений с тангенсом нужно помнить про область определения. Тангенс не определён в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. Полученные корни не должны попадать в эти точки (обычно это проверяется автоматически).

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простое квадратное уравнение

Решим уравнение $\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0$.

Делаем замену $t = \operatorname{tg} x$:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = 2 \text{ и } 1$$

Возвращаемся к x:

$$\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = 2 \Rightarrow x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2

Уравнение с отрицательным дискриминантом

Решим уравнение $2 \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 3 = 0$.

Замена $t = \operatorname{tg} x$:

$$2t^2 - 3t + 3 = 0$$

$$D = 9 - 24 = -15 < 0$$

Дискриминант отрицательный, значит, действительных корней нет, и исходное уравнение не имеет решений.

Ответ: корней нет.

Пример 3

Уравнение с приведением к квадратному

Решим уравнение $3 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.

Это однородное уравнение второй степени. Разделим обе части на $\cos^2 x$ (при условии $\cos x \neq 0$):

$$3\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 1 = 0$$

Замена $t = \operatorname{tg} x$:

$$3t^2 - 4t + 1 = 0$$
$$D = 16 - 12 = 4$$
$$t_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{6} = 1 \text{ и } \frac{1}{3}$$

Возвращаемся:

$$\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$$

Не забудем проверить случай $\cos x = 0$. При $\cos x = 0$ исходное уравнение принимает вид $3\sin^2 x = 0$, то есть $\sin x = 0$, но $\cos x = 0$ и $\sin x = 0$ одновременно не бывает. Значит, потери корней нет.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4

Уравнение с косинусом и синусом

Решим уравнение $\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$.
Делим на $\cos^2 x$:

$$\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$$

Замена $t = \operatorname{tg} x$:

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$
$$D = 4 + 12 = 16$$
$$t_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 3 \text{ и } -1$$

Возвращаемся:

$$\operatorname{tg} x = 3 \Rightarrow x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$$
$$\operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 5

Уравнение с параметром

Решим уравнение $\operatorname{tg}^2 x + a\operatorname{tg} x - 2a = 0$ при различных значениях a.
Замена $t = \operatorname{tg} x$:

$$t^2 + at - 2a = 0$$
$$D = a^2 + 8a = a(a+8)$$

Корни: $t = \frac{-a \pm \sqrt{a(a+8)}}{2}$.
Исследование проводим в зависимости от a, но это уже сложнее.

Пример 6

Общий алгоритм

При решении уравнений с заменой $t = \operatorname{tg} x$:

1. Приводим уравнение к виду $a\operatorname{tg}^2 x + b\operatorname{tg} x + c = 0$ (используя тригонометрические формулы и деление на $\cos^2 x$ для однородных уравнений).
2. Делаем замену $t = \operatorname{tg} x$ (ограничений на t нет).
3. Решаем квадратное уравнение $at^2 + bt + c = 0$.
4. Для каждого корня t решаем $\operatorname{tg} x = t$.
5. Проверяем, не теряем ли мы корни при делении (если делили на $\cos^2 x$, нужно проверить случай $\cos x = 0$ отдельно).

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$
2) $\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3 = 0$
3) $2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 1 = 0$
4) $3\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 1 = 0$
5) $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$
6) $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$
7) $2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0$
8) $3\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 1 = 0$
9) $4\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x + 1 = 0$
10) $9\operatorname{tg}^2 x - 6\operatorname{tg} x + 1 = 0$
11) $\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 6 = 0$
12) $\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x + 6 = 0$

2. Решите однородные уравнения первой степени (делением на $\cos x$):

1) $\sin x - \cos x = 0$
2) $\sin x + \cos x = 0$
3) $2\sin x - 3\cos x = 0$
4) $3\sin x + 2\cos x = 0$
5) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$
6) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$
7) $a\sin x + b\cos x = 0$ (общий случай)
8) $\sin x = 2\cos x$
9) $2\sin x = \cos x$
10) $\sin x = \operatorname{tg} x$ (здесь нужно выразить)
11) $\cos x = \operatorname{ctg} x$
12) $\sin x + \cos x = 0$ (уже было, но повторим)

3. Решите однородные уравнения второй степени (делением на $\cos^2 x$):

1) $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$
2) $\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$
3) $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
4) $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
5) $\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$
6) $\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$
7) $2\sin^2 x - \sin x\cos x - \cos^2 x = 0$
8) $3\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$
9) $4\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
10) $9\sin^2 x - 6\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
11) $\sin^2 x + \sin x\cos x = 0$ (можно вынести $\sin x$)
12) $\sin^2 x - \cos^2 x = 0$ (разность квадратов)

4. Найдите все корни уравнений на отрезке $[0, 2\pi]$:

1) $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$
2) $\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3 = 0$
3) $\sin x - \cos x = 0$
4) $\sin x + \cos x = 0$
5) $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$
6) $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
7) $\sin^2 x - \cos^2 x = 0$
8) $\sin^2 x + \sin x\cos x = 0$
9) $\sin x = 2\cos x$
10) $2\sin x = \cos x$
11) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$
12) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$

5. Решите уравнения с параметрами:

1) $\operatorname{tg}^2 x + a\operatorname{tg} x = 0$
2) $\operatorname{tg}^2 x - a\operatorname{tg} x = 0$
3) $a\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0$
4) $a\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1 = 0$
5) $\operatorname{tg}^2 x + a\operatorname{tg} x + 1 = 0$ (при каких a есть решения?)
6) $\operatorname{tg}^2 x - a\operatorname{tg} x + 1 = 0$
7) $\sin x - a\cos x = 0$
8) $a\sin x - \cos x = 0$
9) $\sin^2 x - a\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
10) $\sin^2 x + a\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$
11) $a\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
12) $\sin^2 x + \sin x\cos x + a\cos^2 x = 0$

6. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $\sin^2 x + \sin 2x - 3\cos^2 x = 0$ (выразите $\sin 2x$)
2) $\sin 2x + 2\sin^2 x = 0$
3) $\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$
4) $\sin 2x + \cos 2x = 1$ (сводится к однородному?)
5) $3\sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x = 0$
6) $2\sin^2 x + \sin 2x - \cos^2 x = 0$

7) $\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x = 0$ (вынесение $\operatorname{tg} x$)

8) $\operatorname{tg}^3 x - 2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0$

9) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x = 0$

10) $\operatorname{tg}^4 x - 5\operatorname{tg}^2 x + 4 = 0$ (биквадратное)

11) $\operatorname{tg}^4 x - 3\operatorname{tg}^2 x + 2 = 0$

12) $\operatorname{tg}^6 x - 7\operatorname{tg}^3 x + 6 = 0$

Замена $t = \operatorname{ctg} x$

Теория

В этой главе мы рассмотрим уравнения, которые сводятся к квадратным с помощью замены $t = \operatorname{ctg} x$. Такие уравнения обычно имеют вид:

$$a \operatorname{ctg}^2 x + b \operatorname{ctg} x + c = 0$$

где $a \neq 0$.

Метод решения:

1. Делаем замену $t = \operatorname{ctg} x$. Как и тангенс, котангенс может принимать любые действительные значения, поэтому ограничений на t нет.
2. Получаем квадратное уравнение $at^2 + bt + c = 0$.
3. Решаем его относительно t.
4. Для каждого корня t решаем уравнение $\operatorname{ctg} x = t$.
5. Записываем ответ.

Важное замечание: При решении уравнений с котангенсом нужно помнить про область определения. Котангенс не определён в точках $x = \pi k$. Полученные корни не должны попадать в эти точки (обычно это проверяется автоматически).

Связь с тангенсом: Часто уравнения с котангенсом можно свести к уравнениям с тангенсом, используя соотношение $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ (при $\operatorname{tg} x \neq 0$). Однако при этом нужно быть внимательным к потере корней, когда $\operatorname{tg} x = 0$ (то есть $x = \pi k$), так как в этих точках котангенс не определён.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простое квадратное уравнение

Решим уравнение $\operatorname{ctg}^2 x - 3 \operatorname{ctg} x + 2 = 0$.

Делаем замену $t = \operatorname{ctg} x$:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = 2 \text{ и } 1$$

Возвращаемся к x:

$$\operatorname{ctg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = 2 \Rightarrow x = \operatorname{arcctg} 2 + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \operatorname{arcctg} 2 + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2

Уравнение с отрицательным дискриминантом

Решим уравнение $2 \operatorname{ctg}^2 x - 3 \operatorname{ctg} x + 3 = 0$.

Замена $t = \operatorname{ctg} x$:

$$2t^2 - 3t + 3 = 0$$

$$D = 9 - 24 = -15 < 0$$

Дискриминант отрицательный, значит, действительных корней нет, и исходное уравнение не имеет решений.

Ответ: корней нет.

Пример 3

Уравнение с приведением к квадратному через тангенс

Решим уравнение $3\operatorname{ctg}^2 x - 4\operatorname{ctg} x + 1 = 0$.

Можно решить напрямую через замену $t = \operatorname{ctg} x$, а можно сделать замену $u = \operatorname{tg} x$, учитывая, что $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{u}$ при $u \neq 0$. Тогда уравнение примет вид:

$$3 \cdot \frac{1}{u^2} - 4 \cdot \frac{1}{u} + 1 = 0$$

Умножаем на u^2:

$$3 - 4u + u^2 = 0 \Rightarrow u^2 - 4u + 3 = 0$$

$$u = 1 \text{ или } u = 3$$

Возвращаемся: $\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $\operatorname{tg} x = 3 \Rightarrow x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$.

Нужно проверить случай $u = 0$ (то есть $\operatorname{tg} x = 0$). При $\operatorname{tg} x = 0$ исходное уравнение не определено, так как $\operatorname{ctg} x$ не существует. Значит, потери корней нет.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4

Однородное уравнение с котангенсом

Решим уравнение $\sin^2 x - 3\sin x \cos x - 4\cos^2 x = 0$.

Разделим на $\sin^2 x$ (при условии $\sin x \neq 0$):

$$1 - 3\operatorname{ctg} x - 4\operatorname{ctg}^2 x = 0$$

$$4\operatorname{ctg}^2 x + 3\operatorname{ctg} x - 1 = 0$$

Замена $t = \operatorname{ctg} x$:

$$4t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$D = 9 + 16 = 25$$

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{8} = \frac{1}{4} \text{ и } -1$$

Возвращаемся:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{4} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$$

Проверим случай $\sin x = 0$. При $\sin x = 0$ исходное уравнение принимает вид $-4\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = 0$, но $\sin x = 0$ и $\cos x = 0$ одновременно не бывает. Значит, потери корней нет.

Ответ: $x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{4} + \pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 5

Уравнение с параметром

Решим уравнение $\operatorname{ctg}^2 x + a\operatorname{ctg} x - 2a = 0$ при различных значениях a.

Замена $t = \operatorname{ctg} x$:

$$t^2 + at - 2a = 0$$

$$D = a^2 + 8a = a(a + 8)$$

Корни: $t = \frac{-a \pm \sqrt{a(a+8)}}{2}$.

Исследование проводим в зависимости от a, но это уже сложнее.

Пример 6

Общий алгоритм

При решении уравнений с заменой $t = \operatorname{ctg} x$:

1. Приводим уравнение к виду $a\operatorname{ctg}^2 x + b\operatorname{ctg} x + c = 0$ (используя тригонометрические формулы и деление на $\sin^2 x$ для однородных уравнений).
2. Делаем замену $t = \operatorname{ctg} x$ (ограничений на t нет).
3. Решаем квадратное уравнение $at^2 + bt + c = 0$.
4. Для каждого корня t решаем $\operatorname{ctg} x = t$.

5. Проверяем, не теряем ли мы корни при делении (если делили на $\sin^2 x$, нужно проверить случай $\sin x = 0$ отдельно).

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $\operatorname{ctg}^2 x - 3\operatorname{ctg} x + 2 = 0$
2) $\operatorname{ctg}^2 x - 4\operatorname{ctg} x + 3 = 0$
3) $2\operatorname{ctg}^2 x - 3\operatorname{ctg} x + 1 = 0$
4) $3\operatorname{ctg}^2 x - 4\operatorname{ctg} x + 1 = 0$
5) $\operatorname{ctg}^2 x - 2\operatorname{ctg} x - 3 = 0$
6) $\operatorname{ctg}^2 x + 2\operatorname{ctg} x - 3 = 0$
7) $2\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x - 1 = 0$
8) $3\operatorname{ctg}^2 x - 2\operatorname{ctg} x - 1 = 0$
9) $4\operatorname{ctg}^2 x + 4\operatorname{ctg} x + 1 = 0$
10) $9\operatorname{ctg}^2 x - 6\operatorname{ctg} x + 1 = 0$
11) $\operatorname{ctg}^2 x - 5\operatorname{ctg} x + 6 = 0$
12) $\operatorname{ctg}^2 x + 5\operatorname{ctg} x + 6 = 0$

2. Решите однородные уравнения первой степени (делением на $\sin x$):

1) $\sin x - \cos x = 0$ (уже было, но через ctg)
2) $\sin x + \cos x = 0$
3) $2\sin x - 3\cos x = 0$
4) $3\sin x + 2\cos x = 0$
5) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$
6) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$
7) $a\sin x + b\cos x = 0$ (общий случай)
8) $\sin x = 2\cos x$
9) $2\sin x = \cos x$
10) $\sin x = \operatorname{ctg} x$ (здесь нужно выразить)
11) $\cos x = \operatorname{tg} x$
12) $\sin x - \cos x = 0$ (повтор)

3. Решите однородные уравнения второй степени (делением на $\sin^2 x$):

1) $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$
2) $\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$
3) $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
4) $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
5) $\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$
6) $\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$
7) $2\sin^2 x - \sin x\cos x - \cos^2 x = 0$
8) $3\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$
9) $4\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
10) $9\sin^2 x - 6\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
11) $\sin^2 x + \sin x\cos x = 0$ (можно вынести $\sin x$)
12) $\sin^2 x - \cos^2 x = 0$ (разность квадратов)

4. Найдите все корни уравнений на отрезке $[0, 2\pi]$:

1) $\operatorname{ctg}^2 x - 3\operatorname{ctg} x + 2 = 0$
2) $\operatorname{ctg}^2 x - 4\operatorname{ctg} x + 3 = 0$
3) $\sin x - \cos x = 0$ (через ctg)
4) $\sin x + \cos x = 0$ (через ctg)
5) $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$ (делением на $\sin^2 x$)
6) $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
7) $\sin^2 x - \cos^2 x = 0$
8) $\sin^2 x + \sin x\cos x = 0$
9) $\sin x = 2\cos x$
10) $2\sin x = \cos x$
11) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$
12) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$

5. Решите уравнения с параметрами:

1) $\operatorname{ctg}^2 x + a\operatorname{ctg} x = 0$
2) $\operatorname{ctg}^2 x - a\operatorname{ctg} x = 0$
3) $a\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x - 1 = 0$
4) $a\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x + 1 = 0$
5) $\operatorname{ctg}^2 x + a\operatorname{ctg} x + 1 = 0$ (при каких a есть решения?)
6) $\operatorname{ctg}^2 x - a\operatorname{ctg} x + 1 = 0$
7) $\sin x - a\cos x = 0$ (через ctg)
8) $a\sin x - \cos x = 0$
9) $\sin^2 x - a\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
10) $\sin^2 x + a\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$
11) $a\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
12) $\sin^2 x + \sin x\cos x + a\cos^2 x = 0$

6. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $\operatorname{ctg}^2 x + \sin^2 x = 1$ (выразите $\operatorname{ctg}^2 x$ через $\sin^2 x$)

2) $\operatorname{ctg}^2 x + \cos^2 x = 1$

3) $\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x = 2$

4) $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 2$

5) $\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 2$

6) $\operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x = 0$ (вынесение $\operatorname{ctg} x$)

7) $\operatorname{ctg}^3 x - 2\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x = 0$

8) $\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg}^2 x - 2\operatorname{ctg} x = 0$

9) $\operatorname{ctg}^4 x - 5\operatorname{ctg}^2 x + 4 = 0$ (биквадратное)

10) $\operatorname{ctg}^4 x - 3\operatorname{ctg}^2 x + 2 = 0$

11) $\operatorname{ctg}^6 x - 7\operatorname{ctg}^3 x + 6 = 0$

12) $\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^2 x = \frac{10}{3}$ (сведите к квадратному относительно $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x$)

Однородные уравнения первой степени

Теория

В этой главе мы рассмотрим однородные уравнения первой степени — уравнения вида:

$$a\sin x + b\cos x = 0$$

где a и b — известные числа, не равные нулю одновременно.

Метод решения:

1. Если $\cos x = 0$, проверяем, является ли это решение корнем.
2. При $\cos x \neq 0$ делим обе части уравнения на $\cos x$.
3. Получаем уравнение $a\operatorname{tg} x + b = 0$, то есть $\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$.
4. Решаем это простейшее уравнение.
5. Объединяем с корнями, полученными из случая $\cos x = 0$ (если они есть).

Альтернативный метод: Можно делить на $\sin x$ (при $\sin x \neq 0$), тогда получим уравнение с котангенсом.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простое однородное уравнение

Решим уравнение $\sin x - \cos x = 0$.

Проверим $\cos x = 0$. При $\cos x = 0$ уравнение принимает вид $\sin x = 0$, что невозможно (нет x, где одновременно $\sin x = 0$ и $\cos x = 0$). Значит, можно делить на $\cos x$.

Делим на $\cos x$:

$$\operatorname{tg} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1$$
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 2

Уравнение с коэффициентами

Решим уравнение $2\sin x + 3\cos x = 0$.

Проверим $\cos x = 0$: при $\cos x = 0$ уравнение даёт $2\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$, что невозможно. Делим на $\cos x$:

$$2\operatorname{tg} x + 3 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{3}{2}$$
$$x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{2}\right) + \pi k = -\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = -\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 3

Уравнение, где $\cos x = 0$ даёт корни

Решим уравнение $\sin x + 0 \cdot \cos x = 0$, то есть $\sin x = 0$.

Здесь делить на $\cos x$ нельзя, так как уравнение не является однородным в полном смысле (нет члена с $\cos x$). Но это простейшее уравнение:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Пример 4

Уравнение с параметром

Решим уравнение $a\sin x + b\cos x = 0$ при различных a, b.

Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение сводится к $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. Если $a \neq 0$ и $b = 0$, то $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k$. Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то делим на $\cos x$: $\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$.

Пример 5

Общий алгоритм

При решении однородного уравнения первой степени $a\sin x + b\cos x = 0$:

1. Рассматриваем случай $\cos x = 0$. Подставляем в уравнение и проверяем, есть ли решения.
2. Если $\cos x = 0$ не даёт решений или мы их уже учли, делим уравнение на $\cos x$ (при $\cos x \neq 0$).
3. Получаем $\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$ и решаем.
4. Записываем ответ, объединяя все найденные корни.

Задачи

1. Решите однородные уравнения первой степени:

1) $\sin x - \cos x = 0$

2) $\sin x + \cos x = 0$

3) $2\sin x - 3\cos x = 0$

4) $3\sin x + 2\cos x = 0$

5) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$

6) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$

7) $5\sin x - 12\cos x = 0$

8) $12\sin x + 5\cos x = 0$

9) $\sin x + 2\cos x = 0$

10) $2\sin x - \cos x = 0$

11) $3\sin x + 4\cos x = 0$

12) $4\sin x - 3\cos x = 0$

2. Решите уравнения, предварительно определив, можно ли делить на $\cos x$:

1) $\sin x = 0$ (не однородное, но простое)

2) $\cos x = 0$

3) $\sin x + \cos x = 0$ (уже было)

4) $2\sin x + \cos x = 0$

5) $\sin x - 2\cos x = 0$

6) $3\sin x - 4\cos x = 0$

7) $\sin x + \cos x = 1$ (не однородное, позже)

8) $\sin x - \cos x = 2$ (не однородное)

9) $\sqrt{2}\sin x + \sqrt{2}\cos x = 0$

10) $\sin x + \cos x = 0$ (повтор)

11) $a\sin x + b\cos x = 0$ (с параметрами)

12) $\sin x + \cos x = 0$ (ещё раз для закрепления)

3. Найдите все корни уравнений на отрезке $[0, 2\pi]$:

1) $\sin x - \cos x = 0$

2) $\sin x + \cos x = 0$

3) $2\sin x - 3\cos x = 0$

4) $3\sin x + 2\cos x = 0$

5) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$

6) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$

7) $5\sin x - 12\cos x = 0$

8) $12\sin x + 5\cos x = 0$

9) $\sin x + 2\cos x = 0$

10) $2\sin x - \cos x = 0$

11) $3\sin x + 4\cos x = 0$

12) $4\sin x - 3\cos x = 0$

4. Решите уравнения с параметрами:

1) $a\sin x + \cos x = 0$

2) $\sin x + a\cos x = 0$

3) $a\sin x + b\cos x = 0$ (общий случай)

4) $(a-1)\sin x + (a+1)\cos x = 0$

5) $(a+2)\sin x - (a-2)\cos x = 0$

6) $a\sin x = \cos x$

7) $\sin x = a\cos x$

8) $a\sin x + \cos x = 0$ (при каких a есть решения?)

9) $\sin x + a\cos x = 0$ (при каких a есть решения?)

10) $a\sin x + b\cos x = 0$ (условие существования ненулевых решений)

11) $\sin x + \cos x = a$ (не однородное, но интересно)

12) $\sin x - \cos x = a$ (тоже не однородное)

5. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ (это уравнение решается методом вспомогательного угла, следующая тема)

2) $\sin x - \cos x = 1$

3) $3\sin x + 4\cos x = 5$

4) $5\sin x - 12\cos x = 13$

5) $\sin x + \cos x = 0$ (уже было, но можно решить и методом вспомогательного угла)

6) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$

7) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$

8) $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$

9) $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$

10) $2\sin x + 3\cos x = 4$ (имеет ли решения?)

11) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ (тождество)

12) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Однородные уравнения второй степени

Теория

В этой главе мы рассмотрим однородные уравнения второй степени — уравнения вида:

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$$

где a, b, c — известные числа, причём хотя бы одно из a или c не равно нулю.

Метод решения:

1. Проверяем случай $\cos x = 0$. Подставляем $\cos x = 0$ в уравнение. Если при этом $\sin x = \pm 1$, то получаем $a = 0$. Значит, при $a = 0$ и $\cos x = 0$ получаем решения.
2. Если $\cos x \neq 0$, делим обе части уравнения на $\cos^2 x$.
3. Получаем квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$:

$$a\operatorname{tg}^2 x + b\operatorname{tg} x + c = 0$$

4. Решаем это уравнение.
5. Для каждого корня t решаем $\operatorname{tg} x = t$.
6. Объединяем с корнями, полученными из случая $\cos x = 0$ (если они есть).

Альтернативный метод: Можно делить на $\sin^2 x$ (при $\sin x \neq 0$), тогда получим уравнение с $\operatorname{ctg} x$.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простое однородное уравнение

Решим уравнение $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$.

Проверим $\cos x = 0$. При $\cos x = 0$ уравнение принимает вид $\sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$, что невозможно (нет x, где одновременно $\sin x = 0$ и $\cos x = 0$). Значит, можно делить на $\cos^2 x$.

Делим на $\cos^2 x$:

$$\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$$

Замена $t = \operatorname{tg} x$:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ или } t = 2$$

Возвращаемся:

$$\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\operatorname{tg} x = 2 \Rightarrow x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2

Уравнение, где $\cos x = 0$ даёт корни

Решим уравнение $\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$.

Заметим, что это уравнение можно упростить: $(\sin x - \cos x)^2 = 0$, то есть $\sin x - \cos x = 0$. Но решим по общему методу.

Проверим $\cos x = 0$: при $\cos x = 0$ уравнение даёт $\sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$, что невозможно.

Делим на $\cos^2 x$:

$$\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 1 = 0 \Rightarrow (\operatorname{tg} x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1$$
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 3

Уравнение с нулевым коэффициентом a

Решим уравнение $2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$.

Проверим $\cos x = 0$: при $\cos x = 0$ уравнение даёт $0 = 0$? Подставляем: $2\sin x \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$ — верно для любого x с $\cos x = 0$. Значит, все $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ являются решениями.

Теперь рассмотрим $\cos x \neq 0$ и разделим на $\cos^2 x$:

$$2\operatorname{tg} x - 3 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$$

$$x = \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

Объединяем решения.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4

Уравнение с нулевым коэффициентом c

Решим уравнение $\sin^2 x + 3\sin x\cos x = 0$.

Проверим $\cos x = 0$: при $\cos x = 0$ уравнение даёт $\sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$, что невозможно.

Можно вынести $\sin x$ за скобки:

$$\sin x(\sin x + 3\cos x) = 0$$

Произведение равно нулю, значит:

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad \sin x + 3\cos x = 0$$

Из первого: $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Из второго: это однородное уравнение первой степени, делим на $\cos x$: $\operatorname{tg} x + 3 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -3 \Rightarrow x = \operatorname{arctg}(-3) + \pi n = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \pi k$, $x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 5

Уравнение с параметром

Решим уравнение $\sin^2 x + a\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$.

Проверим $\cos x = 0$: при $\cos x = 0$ уравнение даёт $\sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$, что невозможно. Значит, делим на $\cos^2 x$:

$$\operatorname{tg}^2 x + a\operatorname{tg} x - 2 = 0$$

Замена $t = \operatorname{tg} x$:

$$t^2 + at - 2 = 0$$

$$D = a^2 + 8$$

Дискриминант всегда положителен, поэтому при любом a есть два различных корня:

$$t_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8}}{2}$$

Далее $\operatorname{tg} x = t_1$ и $\operatorname{tg} x = t_2$ дают серии решений.

Пример 6

Общий алгоритм

При решении однородного уравнения второй степени $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$:

1. Проверяем случай $\cos x = 0$. Если при $\cos x = 0$ уравнение обращается в тождество, добавляем $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ к ответу.
2. Если $\cos x \neq 0$, делим на $\cos^2 x$.
3. Получаем квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$: $a\operatorname{tg}^2 x + b\operatorname{tg} x + c = 0$.
4. Решаем его.
5. Для каждого корня решаем $\operatorname{tg} x = t$.
6. Объединяем все полученные решения.

Задачи

1. Решите однородные уравнения второй степени:

1) $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$
2) $\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$
3) $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
4) $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
5) $\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$
6) $\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$
7) $2\sin^2 x - \sin x\cos x - \cos^2 x = 0$
8) $3\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$
9) $4\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
10) $9\sin^2 x - 6\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
11) $\sin^2 x - \cos^2 x = 0$ (разность квадратов)
12) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (тождество)

2. Решите уравнения, предварительно вынеся общий множитель:

1) $\sin^2 x + \sin x\cos x = 0$
2) $\sin^2 x - \sin x\cos x = 0$
3) $\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$
4) $\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
5) $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x = 0$
6) $3\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 0$
7) $4\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0$
8) $5\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 0$
9) $\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 0$
10) $\sin^2 x - 3\sin x\cos x = 0$
11) $2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$
12) $3\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 0$

3. Найдите все корни уравнений на отрезке $[0, 2\pi]$:

1) $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$
2) $\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$
3) $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
4) $\sin^2 x - \cos^2 x = 0$
5) $\sin^2 x + \sin x\cos x = 0$
6) $\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$
7) $2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$
8) $\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$
9) $3\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$
10) $4\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
11) $\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$
12) $2\sin^2 x - \sin x\cos x - \cos^2 x = 0$

4. Решите уравнения с параметрами:

1) $\sin^2 x + a\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
2) $\sin^2 x + a\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$
3) $a\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 0$
4) $\sin^2 x - a\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
5) $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ (общий случай)
6) $\sin^2 x + \sin x\cos x + a\cos^2 x = 0$
7) $\sin^2 x + a\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$
8) $2\sin^2 x - a\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
9) $\sin^2 x + a\sin x\cos x = 0$
10) $\sin x\cos x + a\cos^2 x = 0$
11) $a\sin^2 x - \sin x\cos x = 0$
12) $\sin^2 x - a\cos^2 x = 0$

5. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $\sin^2 x + \sin 2x - 3\cos^2 x = 0$ (выразите $\sin 2x$)
2) $\sin 2x + 2\sin^2 x = 0$
3) $\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$
4) $3\sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x = 0$
5) $2\sin^2 x + \sin 2x - \cos^2 x = 0$
6) $\sin^2 x + \sin 2x + \cos^2 x = 1$ (упростите)
7) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (тождество)
8) $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin 2x$
9) $\sin^2 x + \cos^2 x + \sin 2x = 1 + \sin 2x$ (тривиально)
10) $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$ (замена)
11) $\cos^2 x + \cos^2 2x = 1$
12) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$ (олимпиадная)

Практика по блоку 4

Теория

В этом блоке мы изучили уравнения, которые сводятся к квадратным с помощью замены переменной, а также однородные уравнения:

- Замена $t = \sin x$ (глава 16)
- Замена $t = \cos x$ (глава 17)
- Замена $t = \operatorname{tg} x$ (глава 18)
- Замена $t = \operatorname{ctg} x$ (глава 19)
- Однородные уравнения первой степени $a \sin x + b \cos x = 0$ (глава 20)
- Однородные уравнения второй степени $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ (глава 21)

В этом блоке важно правильно определить тип уравнения и выбрать подходящую замену или метод.

В этой главе собраны задачи на все эти типы уравнений вперемешку. Ваша задача — определить тип уравнения и применить нужный метод.

Задачи

1. Решите уравнения с заменой $t = \sin x$:

1) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

2) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$

3) $\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$

4) $\cos 2x + 3\sin x - 2 = 0$

5) $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$

6) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$

7) $\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$

8) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

9) $3\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0$

10) $4\sin^2 x + 4\sin x + 1 = 0$

11) $\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0$

12) $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$

2. Решите уравнения с заменой $t = \cos x$:

1) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

2) $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$

3) $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$

4) $\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$

5) $\sin^2 x - 5\cos x - 3 = 0$

6) $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$

7) $\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$

8) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

9) $3\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$

10) $4\cos^2 x + 4\cos x + 1 = 0$

11) $\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0$

12) $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$

3. Решите уравнения с заменой $t = \operatorname{tg} x$:

1) $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$

2) $\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3 = 0$

3) $2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 1 = 0$

4) $3\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 1 = 0$

5) $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$ (сведите к tg)

6) $\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$

7) $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$

8) $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$

9) $\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$

10) $\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$

11) $2\sin^2 x - \sin x\cos x - \cos^2 x = 0$

12) $3\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$

4. Решите уравнения с заменой $t = \operatorname{ctg} x$:

1) $\operatorname{ctg}^2 x - 3\operatorname{ctg} x + 2 = 0$

2) $\operatorname{ctg}^2 x - 4\operatorname{ctg} x + 3 = 0$

3) $2\operatorname{ctg}^2 x - 3\operatorname{ctg} x + 1 = 0$

4) $3\operatorname{ctg}^2 x - 4\operatorname{ctg} x + 1 = 0$

5) $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$ (сведите к ctg)

6) $\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$

7) $2\sin^2 x - 3\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$

8) $3\sin^2 x - 4\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$

9) $\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$

10) $\sin^2 x + 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$

11) $2\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$

12) $3\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$

5. Решите однородные уравнения первой степени:

1) $\sin x - \cos x = 0$

2) $\sin x + \cos x = 0$

3) $2\sin x - 3\cos x = 0$

4) $3\sin x + 2\cos x = 0$

5) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$

6) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$

7) $5\sin x - 12\cos x = 0$

8) $12\sin x + 5\cos x = 0$

9) $\sin x + 2\cos x = 0$

10) $2\sin x - \cos x = 0$

11) $3\sin x + 4\cos x = 0$

12) $4\sin x - 3\cos x = 0$

6. Решите однородные уравнения второй степени:

1) $\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$

2) $\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$

3) $2\sin^2 x - 3\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$

4) $3\sin^2 x - 4\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$

5) $\sin^2 x - \cos^2 x = 0$

6) $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$

7) $\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$

8) $2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$

9) $\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$

10) $3\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$

11) $4\sin^2 x - 4\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$

12) $\sin^2 x + 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$

7. Решите уравнения смешанных типов (определите метод самостоятельно):

1) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

2) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

3) $\mathrm{tg}^2 x - 2\,\mathrm{tg}\, x - 3 = 0$

4) $\mathrm{ctg}^2 x + \mathrm{ctg}\, x - 2 = 0$

5) $\sin x - 2\cos x = 0$

6) $3\sin x + 4\cos x = 0$

7) $\sin^2 x - \sin x \cos x = 0$

8) $\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$

9) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$

10) $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

11) $\mathrm{tg}^2 x - 4 = 0$

12) $\mathrm{ctg}^2 x - 3 = 0$

Уравнения вида $\sin x + \cos x = a$

Теория

В этой главе мы рассмотрим уравнения вида $\sin x + \cos x = a$, где a — некоторое число. Такие уравнения решаются методом введения вспомогательного угла.

Основная идея: Выражение $\sin x + \cos x$ можно представить как $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Действительно:

$$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sin x + \cos x$$

Метод решения:

1. Преобразуем уравнение к виду $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = a$.
2. Отсюда $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}$.
3. Уравнение имеет решения только при $\left|\frac{a}{\sqrt{2}}\right| \le 1$, то есть $|a| \le \sqrt{2}$.
4. Если условие выполнено, решаем простейшее уравнение относительно $x + \frac{\pi}{4}$.
5. Возвращаемся к x.

Альтернативный вид: Можно также представить $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Уравнение $\sin x + \cos x = 1$

Решим уравнение $\sin x + \cos x = 1$.

Преобразуем:

$$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Решаем:

$$x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

Рассмотрим два случая: 1) $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ 2) $x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi k = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = 2\pi k,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Пример 2

Уравнение $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

Решим уравнение $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

$$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Пример 3

Уравнение $\sin x + \cos x = 0$

Решим уравнение $\sin x + \cos x = 0$.

$$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$
$$x + \frac{\pi}{4} = \pi n$$
$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4

Уравнение $\sin x + \cos x = -1$

Решим уравнение $\sin x + \cos x = -1$.

$$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Решаем:

$$x + \frac{\pi}{4} = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$$

Рассмотрим два случая: 1) $x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ 2) $x + \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi k = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 5

Когда решений нет

Решим уравнение $\sin x + \cos x = 2$.

Правая часть $2 > \sqrt{2}$, поэтому уравнение не имеет решений.

Ответ: корней нет.

Пример 6

Общий алгоритм

При решении уравнения $\sin x + \cos x = a$:

1. Проверяем условие $|a| \le \sqrt{2}$. Если $|a| > \sqrt{2}$, ответ: корней нет.
2. Преобразуем уравнение к виду $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = a$.
3. Делим на $\sqrt{2}$: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}$.
4. Решаем простейшее уравнение.
5. Выражаем x.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $\sin x + \cos x = 0$
2) $\sin x + \cos x = 1$
3) $\sin x + \cos x = -1$
4) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$
5) $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$
6) $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
7) $\sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
8) $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$
9) $\sin x + \cos x = -\frac{1}{2}$
10) $\sin x + \cos x = \sqrt{3}$ (есть ли решения?)
11) $\sin x + \cos x = 2$
12) $\sin x + \cos x = -2$

2. Решите уравнения, используя преобразование к косинусу:

1) $\sin x + \cos x = 1$ (через $\cos(x - \frac{\pi}{4})$)

2) $\sin x + \cos x = 0$

3) $\sin x + \cos x = -1$

4) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

5) $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$

6) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

7) $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (есть ли решения?)

8) $\sin x + \cos x = 0.5$

9) $\sin x + \cos x = -0.5$

10) $\sin x + \cos x = 1.5$

11) $\sin x + \cos x = -1.5$

12) $\sin x + \cos x = 0.7$

3. Найдите все корни уравнений на отрезке $[0, 2\pi]$:

1) $\sin x + \cos x = 0$

2) $\sin x + \cos x = 1$

3) $\sin x + \cos x = -1$

4) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

5) $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$

6) $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

7) $\sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

8) $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$

9) $\sin x + \cos x = -\frac{1}{2}$

10) $\sin x + \cos x = 0.3$

11) $\sin x + \cos x = -0.3$

12) $\sin x + \cos x = 1.2$ (есть ли на отрезке?)

4. Решите уравнения и запишите ответ в градусах:

1) $\sin x + \cos x = 0$

2) $\sin x + \cos x = 1$

3) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

4) $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5) $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$

6) $\sin x + \cos x = 0$

7) $\sin x + \cos x = -\frac{1}{2}$

8) $\sin x + \cos x = -1$

9) $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$

10) $\sin x + \cos x = 1.5$ (нет решений)

11) $\sin x + \cos x = 0.8$

12) $\sin x + \cos x = -0.8$

5. Решите уравнения с параметрами:

1) $\sin x + \cos x = a$ (при каких a есть решения?)

2) $\sin x + \cos x = a$ (выразите x через a)

3) $\sin x + \cos x = a$ (найдите все a, при которых уравнение имеет ровно 2 корня на $[0, 2\pi]$)

4) $\sin x + \cos x = a$ (найдите все a, при которых уравнение имеет ровно 1 корень на $[0, 2\pi]$)

5) $\sin x + \cos x = a$ (найдите все a, при которых уравнение имеет ровно 3 корня на $[0, 2\pi]$)

6) $\sin x + \cos x = a$ (найдите все a, при которых уравнение имеет ровно 4 корня на $[0, 2\pi]$)

7) $\sin x + \cos x = a$ (при каких a корни образуют арифметическую прогрессию?)

8) $\sin x + \cos x = a$ (при каких a корни удовлетворяют условию $x_1 + x_2 = \pi$?)

9) $\sin x + \cos x = a$ (исследуйте количество корней в зависимости от a)

10) $\sin x + \cos x = a$ (постройте график зависимости количества корней от a)

11) $\sin x + \cos x = a$ (решите неравенство $\sin x + \cos x > a$)

12) $\sin x + \cos x = a$ (решите неравенство $\sin x + \cos x < a$)

6. Задачи повышенной сложности:

1) $\sin 2x + \cos 2x = 1$ (сведите к $\sin x + \cos x$)

2) $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}$

3) $\sin 2x + \cos 2x = 0$

4) $\sin 3x + \cos 3x = 1$

5) $\sin 3x + \cos 3x = 0$

6) $\sin 4x + \cos 4x = \frac{1}{2}$

7) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (тождество)

8) $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin x + \cos x$ (разложите левую часть)

9) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$ (сведите к $\sin x + \cos x$)

10) $\sin^3 x + \cos^3 x = 0$

11) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$ (выразите через $\sin 2x$)

12) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$ (выразите через $\sin 2x$)

Уравнения вида $\sin x - \cos x = a$

Теория

В этой главе мы рассмотрим уравнения вида $\sin x - \cos x = a$, где a — некоторое число. Как и в предыдущем случае, такие уравнения решаются методом введения вспомогательного угла.

Основная идея: Выражение $\sin x - \cos x$ можно представить как $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Действительно:

$$\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\sin x \cos\frac{\pi}{4} - \cos x \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sin x - \cos x$$

Метод решения:

1. Преобразуем уравнение к виду $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = a$.
2. Отсюда $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}$.
3. Уравнение имеет решения только при $\left|\frac{a}{\sqrt{2}}\right| \leq 1$, то есть $|a| \leq \sqrt{2}$.
4. Если условие выполнено, решаем простейшее уравнение относительно $x - \frac{\pi}{4}$.
5. Возвращаемся к x.

Альтернативный вид: Можно также представить $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ или $\sin x - \cos x = -\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Уравнение $\sin x - \cos x = 0$

Решим уравнение $\sin x - \cos x = 0$.

Преобразуем:

$$\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2

Уравнение $\sin x - \cos x = 1$

Решим уравнение $\sin x - \cos x = 1$.

$$\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Решаем:

$$x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

Рассмотрим два случая: 1) $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ 2) $x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi k = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Пример 3

Уравнение $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$

Решим уравнение $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$.

$$\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$
$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$
$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$
$$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 4

Уравнение $\sin x - \cos x = -\sqrt{2}$

Решим уравнение $\sin x - \cos x = -\sqrt{2}$.

$$\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$
$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$$
$$x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$$
$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 5

Уравнение $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$

Решим уравнение $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$.
Проверим условие: $\left|\frac{1}{2}\right| \leq \sqrt{2}$ — верно.

$$\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$
$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Обозначим $\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$. Тогда:

$$x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n\varphi + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$
$$x = \frac{\pi}{4} + (-1)^n\varphi + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 6

Общий алгоритм

При решении уравнения $\sin x - \cos x = a$:

1. Проверяем условие $|a| \leq \sqrt{2}$. Если $|a| > \sqrt{2}$, ответ: корней нет.
2. Преобразуем уравнение к виду $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = a$.
3. Делим на $\sqrt{2}$: $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}$.
4. Решаем простейшее уравнение.
5. Выражаем x.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $\sin x - \cos x = 0$
2) $\sin x - \cos x = 1$
3) $\sin x - \cos x = -1$
4) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$
5) $\sin x - \cos x = -\sqrt{2}$
6) $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
7) $\sin x - \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
8) $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$
9) $\sin x - \cos x = -\frac{1}{2}$
10) $\sin x - \cos x = \sqrt{3}$ (есть ли решения?)
11) $\sin x - \cos x = 2$
12) $\sin x - \cos x = -2$

2. Решите уравнения, используя преобразование к косинусу:

1) $\sin x - \cos x = 1$ (через $\cos(x + \frac{\pi}{4})$)
2) $\sin x - \cos x = 0$
3) $\sin x - \cos x = -1$
4) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$
5) $\sin x - \cos x = -\sqrt{2}$
6) $\sin x - \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$
7) $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (есть ли решения?)
8) $\sin x - \cos x = 0.5$
9) $\sin x - \cos x = -0.5$
10) $\sin x - \cos x = 1.5$
11) $\sin x - \cos x = -1.5$
12) $\sin x - \cos x = 0.7$

3. Найдите все корни уравнений на отрезке $[0, 2\pi]$:

1) $\sin x - \cos x = 0$
2) $\sin x - \cos x = 1$
3) $\sin x - \cos x = -1$
4) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$
5) $\sin x - \cos x = -\sqrt{2}$
6) $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
7) $\sin x - \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
8) $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$
9) $\sin x - \cos x = -\frac{1}{2}$
10) $\sin x - \cos x = 0.3$
11) $\sin x - \cos x = -0.3$
12) $\sin x - \cos x = 1.2$ (есть ли на отрезке?)

4. Решите уравнения и запишите ответ в градусах:

1) $\sin x - \cos x = 0$
2) $\sin x - \cos x = 1$
3) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$
4) $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
5) $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$
6) $\sin x - \cos x = 0$
7) $\sin x - \cos x = -\frac{1}{2}$
8) $\sin x - \cos x = -1$
9) $\sin x - \cos x = -\sqrt{2}$
10) $\sin x - \cos x = 1.5$ (нет решений)
11) $\sin x - \cos x = 0.8$
12) $\sin x - \cos x = -0.8$

5. Решите уравнения с параметрами:

1) $\sin x - \cos x = a$ (при каких a есть решения?)
2) $\sin x - \cos x = a$ (выразите x через a)
3) $\sin x - \cos x = a$ (найдите все a, при которых уравнение имеет ровно 2 корня на $[0, 2\pi]$)
4) $\sin x - \cos x = a$ (найдите все a, при которых уравнение имеет ровно 1 корень на $[0, 2\pi]$)
5) $\sin x - \cos x = a$ (найдите все a, при которых уравнение имеет ровно 3 корня на $[0, 2\pi]$)
6) $\sin x - \cos x = a$ (найдите все a, при которых уравнение имеет ровно 4 корня на $[0, 2\pi]$)
7) $\sin x - \cos x = a$ (при каких a корни образуют арифметическую прогрессию?)
8) $\sin x - \cos x = a$ (при каких a корни удовлетворяют условию $x_1 + x_2 = \pi$?)
9) $\sin x - \cos x = a$ (исследуйте количество корней в зависимости от a)
10) $\sin x - \cos x = a$ (постройте график зависимости количества корней от a)
11) $\sin x - \cos x = a$ (решите неравенство $\sin x - \cos x > a$)
12) $\sin x - \cos x = a$ (решите неравенство $\sin x - \cos x < a$)

6. Задачи повышенной сложности:

1) $\sin 2x - \cos 2x = 1$ (сведите к $\sin x - \cos x$)

2) $\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}$

3) $\sin 2x - \cos 2x = 0$

4) $\sin 3x - \cos 3x = 1$

5) $\sin 3x - \cos 3x = 0$

6) $\sin 4x - \cos 4x = \frac{1}{2}$

7) $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin x - \cos x$ (разложите левую часть)

8) $\sin^3 x - \cos^3 x = 1$ (сведите к $\sin x - \cos x$)

9) $\sin^3 x - \cos^3 x = 0$

10) $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$ (выразите через $\sin 2x$)

11) $\sin^6 x - \cos^6 x = \frac{1}{4}$ (выразите через $\sin 2x$)

12) $\sin x - \cos x = \operatorname{tg} x$ (решите графически или аналитически)

Уравнения вида $a \sin x + b \cos x = c$

Теория

В этой главе мы рассмотрим общий случай уравнений вида $a \sin x + b \cos x = c$, где a, b, c — известные числа, причём a и b не равны нулю одновременно. Это обобщение двух предыдущих глав.

Метод введения вспомогательного угла:

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Заметим, что коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ удовлетворяют условию:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$$

Значит, существует такой угол φ, что:

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(или наоборот, в зависимости от выбора).

Тогда левая часть преобразуется к виду $\sin(x+\varphi)$ или $\cos(x-\varphi)$.

Два варианта:

1. Если положить $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, то:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x = \sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \sin(x+\varphi)$$

2. Если положить $\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, то:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x = \cos x \cos \varphi + \sin x \sin \varphi = \cos(x-\varphi)$$

Условие существования решений: Уравнение имеет решения только при выполнении условия:

$$|c| \le \sqrt{a^2+b^2}$$

Метод решения:

1. Проверяем условие $|c| \le \sqrt{a^2+b^2}$. Если оно не выполняется, решений нет.
2. Находим вспомогательный угол φ из соотношений $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
3. Преобразуем уравнение к виду $\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
4. Решаем простейшее уравнение.
5. Выражаем x.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Уравнение $\sin x + \cos x = 1$

Это уравнение мы уже решали в главе 23. Здесь $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$.
$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}$. Условие $|c| \le \sqrt{2}$ выполнено.
Находим $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, значит $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
Уравнение принимает вид $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Далее решаем как в главе 23.

Пример 2

Уравнение $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$

Решим уравнение $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$.

Здесь $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, $c = 1$.

$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3+1} = 2$. Условие $|c| \le 2$ выполнено.

Находим вспомогательный угол:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{2}$$

Значит $\varphi = \frac{\pi}{6}$ (можно взять $\varphi = \frac{\pi}{6}$, так как и синус и косинус положительны).

Тогда:

$$\sin(x+\varphi) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{2}$$

Решаем:

$$x + \frac{\pi}{6} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$$

Рассмотрим два случая: 1) $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \Rightarrow x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ 2) $x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = 2\pi k$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 3

Уравнение $3\sin x + 4\cos x = 5$

Решим уравнение $3\sin x + 4\cos x = 5$.

$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{9+16} = 5$. Условие $|c| \le 5$ выполнено (равенство).

Находим вспомогательный угол:

$$\cos\varphi = \frac{3}{5}, \quad \sin\varphi = \frac{4}{5}$$

Здесь φ не является табличным углом, но это не важно.

Тогда:

$$\sin(x+\varphi) = \frac{5}{5} = 1$$

$$x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \varphi + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$$

где $\varphi = \arcsin\frac{4}{5} = \arccos\frac{3}{5}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 4

Уравнение $\sin x + 2\cos x = 3$

Решим уравнение $\sin x + 2\cos x = 3$.

$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \approx 2.236$. $c = 3 > \sqrt{5}$, поэтому решений нет.

Ответ: корней нет.

Пример 5

Использование формулы косинуса разности

Решим уравнение $3\sin x + 4\cos x = 5$ через косинус.

Можно выбрать $\sin\varphi = \frac{3}{5}$, $\cos\varphi = \frac{4}{5}$, тогда:

$$\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = \cos x\cos\varphi + \sin x\sin\varphi = \cos(x-\varphi) = 1$$

$$x - \varphi = 2\pi k$$

$$x = \varphi + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$$

где $\varphi = \arccos\frac{4}{5} = \arcsin\frac{3}{5}$.

Заметим, что получился другой вид ответа, но множество решений то же самое (проверьте, что $\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{4}{5} = \arccos\frac{4}{5}$).

Пример 6

Общий алгоритм

При решении уравнения $a\sin x + b\cos x = c$:

1. Вычисляем $R = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. Проверяем условие $|c| \le R$. Если $|c| > R$, ответ: корней нет.
3. Находим угол φ такой, что $\cos\varphi = \frac{a}{R}$, $\sin\varphi = \frac{b}{R}$.
4. Преобразуем уравнение к виду $\sin(x+\varphi) = \frac{c}{R}$.
5. Решаем простейшее уравнение.
6. Записываем ответ.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $\sin x + \cos x = 1$
2) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$
3) $\sin x + \cos x = 0$
4) $\sin x - \cos x = 1$
5) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$
6) $\sin x - \cos x = 0$
7) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$
8) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$
9) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$
10) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$
11) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$
12) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$

2. Решите уравнения:

1) $3\sin x + 4\cos x = 5$
2) $3\sin x + 4\cos x = 4$
3) $3\sin x + 4\cos x = 3$
4) $5\sin x + 12\cos x = 13$
5) $5\sin x + 12\cos x = 12$
6) $5\sin x + 12\cos x = 10$
7) $8\sin x + 15\cos x = 17$
8) $8\sin x + 15\cos x = 15$
9) $8\sin x + 15\cos x = 10$
10) $7\sin x + 24\cos x = 25$
11) $7\sin x + 24\cos x = 24$
12) $7\sin x + 24\cos x = 20$

3. Найдите все корни уравнений на отрезке $[0, 2\pi]$:

1) $\sin x + \cos x = 1$
2) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$
3) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$
4) $3\sin x + 4\cos x = 5$
5) $3\sin x + 4\cos x = 4$
6) $5\sin x + 12\cos x = 13$
7) $5\sin x + 12\cos x = 12$
8) $8\sin x + 15\cos x = 17$
9) $8\sin x + 15\cos x = 15$
10) $7\sin x + 24\cos x = 25$
11) $7\sin x + 24\cos x = 24$
12) $\sin x + 2\cos x = \sqrt{5}$ (найдите точные значения)

4. Решите уравнения с параметрами:

1) $a\sin x + b\cos x = c$ (общий случай)
2) $\sin x + a\cos x = 1$ (при каких a есть решения?)
3) $a\sin x + \cos x = 1$
4) $a\sin x + a\cos x = 1$
5) $\sin x + a\cos x = a$
6) $a\sin x + \cos x = a$
7) $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}$
8) $a\sin x + b\cos x = 0$
9) $a\sin x + b\cos x = c$ (условие существования решений)
10) $\sin x + 2\cos x = a$ (при каких a есть решения?)
11) $2\sin x + 3\cos x = a$
12) $5\sin x + 12\cos x = a$

5. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $\sin 2x + \cos 2x = 1$ (сведите к $\sin x + \cos x$)

2) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 1$

3) $\sin 3x + \cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4) $\sin^2 x + \sin x \cos x = 1$ (выразите через $\sin 2x$ и $\cos 2x$)

5) $\sin x \cos x + \sin x + \cos x = 1$ (замена $t = \sin x + \cos x$)

6) $\sin x \cos x - \sin x - \cos x = 1$

7) $\sin^3 x + \cos^3 x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (сведите к $\sin x + \cos x$)

8) $\sin^3 x - \cos^3 x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

9) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$ (выразите через $\sin 2x$)

10) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{2}$

11) $\sin x + \cos x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ (олимпиадная)

12) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$

Уравнения с двойными углами

Теория

В этой главе мы рассмотрим уравнения, содержащие функции двойных углов: $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$. Такие уравнения обычно сводятся к уже изученным типам с помощью формул:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$$

Основные приёмы:

- Замена $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ и сведение к однородным уравнениям.
- Замена $\cos 2x$ через $\sin^2 x$ или $\cos^2 x$ и сведение к квадратным относительно $\sin x$ или $\cos x$.
- Использование формул для понижения степени.
- Разложение на множители.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Уравнение с $\sin 2x$ и $\sin x$

Решим уравнение $\sin 2x = \sin x$.
Используем формулу $\sin 2x = 2\sin x\cos x$:

$$2\sin x\cos x = \sin x$$
$$2\sin x\cos x - \sin x = 0$$
$$\sin x(2\cos x - 1) = 0$$

Произведение равно нулю, значит:

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad 2\cos x - 1 = 0$$

Из первого: $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Из второго: $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \pi k$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2

Уравнение с $\sin 2x$ и $\cos x$

Решим уравнение $\sin 2x = \cos x$.

$$2\sin x\cos x = \cos x$$
$$2\sin x\cos x - \cos x = 0$$
$$\cos x(2\sin x - 1) = 0$$

Произведение равно нулю, значит:

$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad 2\sin x - 1 = 0$$

Из первого: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Из второго: $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 3

Уравнение с $\cos 2x$ и $\sin x$

Решим уравнение $\cos 2x + 3\sin x = 2$.
Используем формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$:

$$1 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 2$$

$$-2\sin^2 x + 3\sin x - 1 = 0$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$

Замена $t = \sin x$, $|t| \le 1$:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4} = 1 \text{ и } \frac{1}{2}$$

Оба корня подходят.
Возвращаемся:

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4

Уравнение с $\cos 2x$ и $\cos x$

Решим уравнение $\cos 2x = \cos x$.
Используем формулу $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$:

$$2\cos^2 x - 1 = \cos x$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

Замена $t = \cos x$, $|t| \le 1$:

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} = 1 \text{ и } -\frac{1}{2}$$

Оба корня подходят.
Возвращаемся:

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = 2\pi k$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 5

Уравнение с $\operatorname{tg} 2x$

Решим уравнение $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$.
ОДЗ: $x \ne \frac{\pi}{2} + \pi m$, $2x \ne \frac{\pi}{2} + \pi k$, $\operatorname{tg} x \ne \pm 1$.
Из равенства тангенсов следует, что аргументы отличаются на πn:

$$2x = x + \pi n$$

$$x = \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$$

Проверим ОДЗ: при $x = \pi n$ все условия выполнены (кроме $n = \frac{1}{2} + m$, но таких целых n нет).
Ответ: $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 6

Уравнение с понижением степени

Решим уравнение $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$.

Заметим, что $\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$. Тогда:

$$-\cos 2x = \frac{1}{2}$$
$$\cos 2x = -\frac{1}{2}$$
$$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$$
$$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 7

Общий алгоритм

При решении уравнений с двойными углами:

1. Используем формулы двойного угла, чтобы выразить всё через функции от x.
2. Приводим уравнение к знакомому типу (квадратное, однородное, разложение на множители).
3. Решаем полученное уравнение.
4. При необходимости делаем проверку ОДЗ.

Задачи

1. Решите уравнения с $\sin 2x$:

1) $\sin 2x = \sin x$

2) $\sin 2x = \cos x$

3) $\sin 2x = 2\sin x$

4) $\sin 2x = -2\cos x$

5) $\sin 2x + \sin x = 0$

6) $\sin 2x - \cos x = 0$

7) $2\sin 2x + \sin x = 0$

8) $3\sin 2x - 2\cos x = 0$

9) $\sin 2x = \operatorname{tg} x$

10) $\sin 2x = \operatorname{ctg} x$

11) $\sin 2x = \frac{1}{2}$

12) $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Решите уравнения с $\cos 2x$:

1) $\cos 2x = \cos x$

2) $\cos 2x = \sin x$

3) $\cos 2x = 2\cos x$

4) $\cos 2x = -2\sin x$

5) $\cos 2x + \cos x = 0$

6) $\cos 2x - \sin x = 0$

7) $\cos 2x + 3\sin x = 2$

8) $\cos 2x - 5\sin x = 3$

9) $\cos 2x = \operatorname{tg} x$

10) $\cos 2x = \operatorname{ctg} x$

11) $\cos 2x = \frac{1}{2}$

12) $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Решите уравнения с $\operatorname{tg} 2x$:

1) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$

2) $\operatorname{tg} 2x = 2\operatorname{tg} x$

3) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} x$

4) $\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

5) $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x = 0$

6) $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = 0$

7) $\operatorname{tg} 2x = 1$

8) $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$

9) $\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

10) $\operatorname{tg} 2x = 2$

11) $\operatorname{tg} 2x = -2$

12) $\operatorname{tg} 2x = 0$

4. Найдите все корни уравнений на отрезке $[0, 2\pi]$:

1) $\sin 2x = \sin x$

2) $\sin 2x = \cos x$

3) $\cos 2x = \cos x$

4) $\cos 2x = \sin x$

5) $\cos 2x + 3\sin x = 2$

6) $\sin 2x + \sin x = 0$

7) $\cos 2x + \cos x = 0$

8) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$

9) $\sin 2x = \frac{1}{2}$

10) $\cos 2x = \frac{1}{2}$

11) $\operatorname{tg} 2x = 1$

12) $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$

5. Решите уравнения, используя понижение степени:

1) $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$

2) $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (тождество)

4) $2\sin^2 x - 1 = 0$

5) $1 - 2\cos^2 x = 0$

6) $\sin^2 x - \sin^2 2x = 0$

7) $\cos^2 x - \cos^2 2x = 0$

8) $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$

9) $\cos^2 x + \cos^2 2x = 1$

10) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$ (олимпиадная)

11) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2}$

12) $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}$

6. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $\sin 2x + \cos 2x = 1$

2) $\sin 2x - \cos 2x = 1$

3) $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}$

4) $\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}$

5) $\sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4}$

6) $\sin^2 2x - \cos^2 2x = \frac{1}{2}$

7) $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x = 2$

8) $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x = 2$

9) $\sin 2x + \sin 4x = 0$

10) $\cos 2x + \cos 4x = 0$

11) $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = 0$

12) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0$

Практика по блоку 5

Теория

В этом блоке мы изучили методы решения уравнений, связанных с преобразованием выражений вида $a\sin x + b\cos x$ и уравнений с двойными углами:

- $\sin x + \cos x = a$ (глава 23)
- $\sin x - \cos x = a$ (глава 24)
- $a\sin x + b\cos x = c$ (глава 25) — метод вспомогательного угла
- Уравнения с двойными углами (глава 26)

Основная идея методов — свести уравнение к простейшему с помощью преобразования левой части в одну тригонометрическую функцию.

В этой главе собраны задачи на все эти типы уравнений вперемешку. Ваша задача — определить, какой метод нужно применить.

Задачи

1. Решите уравнения вида $\sin x + \cos x = a$:

1) $\sin x + \cos x = 0$

2) $\sin x + \cos x = 1$

3) $\sin x + \cos x = -1$

4) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

5) $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$

6) $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

7) $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$

8) $\sin x + \cos x = -\frac{1}{2}$

9) $\sin x + \cos x = 0.3$

10) $\sin x + \cos x = 2$ (нет решений)

11) $\sin x + \cos x = \sqrt{3}$ (нет решений)

12) $\sin x + \cos x = 1.5$ (нет решений)

2. Решите уравнения вида $\sin x - \cos x = a$:

1) $\sin x - \cos x = 0$

2) $\sin x - \cos x = 1$

3) $\sin x - \cos x = -1$

4) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$

5) $\sin x - \cos x = -\sqrt{2}$

6) $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

7) $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$

8) $\sin x - \cos x = -\frac{1}{2}$

9) $\sin x - \cos x = 0.3$

10) $\sin x - \cos x = 2$ (нет решений)

11) $\sin x - \cos x = \sqrt{3}$ (нет решений)

12) $\sin x - \cos x = 1.5$ (нет решений)

3. Решите уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$:

1) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$

2) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$

3) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$

4) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$

5) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$

6) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$

7) $3\sin x + 4\cos x = 5$

8) $3\sin x + 4\cos x = 4$

9) $3\sin x + 4\cos x = 3$

10) $5\sin x + 12\cos x = 13$

11) $5\sin x + 12\cos x = 12$

12) $5\sin x + 12\cos x = 10$

4. Решите уравнения с двойными углами:

1) $\sin 2x = \sin x$

2) $\sin 2x = \cos x$

3) $\cos 2x = \cos x$

4) $\cos 2x = \sin x$

5) $\cos 2x + 3\sin x = 2$

6) $\sin 2x + \sin x = 0$

7) $\cos 2x + \cos x = 0$

8) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$

9) $\sin 2x = \frac{1}{2}$

10) $\cos 2x = \frac{1}{2}$

11) $\operatorname{tg} 2x = 1$

12) $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$

5. Найдите все корни уравнений на отрезке $[0, 2\pi]$:

1) $\sin x + \cos x = 1$

2) $\sin x - \cos x = 1$

3) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$

4) $3\sin x + 4\cos x = 5$

5) $\sin 2x = \sin x$

6) $\sin 2x = \cos x$

7) $\cos 2x = \cos x$

8) $\cos 2x = \sin x$

9) $\sin 2x + \sin x = 0$

10) $\cos 2x + \cos x = 0$

11) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$

12) $\cos 2x + 3\sin x = 2$

6. Решите уравнения смешанных типов (определите метод самостоятельно):

1) $\sin 2x + \cos 2x = 1$

2) $\sin 2x - \cos 2x = 1$

3) $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}$

4) $\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}$

5) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 2x$

6) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\cos 2x$

7) $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$

8) $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin x + \cos x$

9) $\sin x\cos x + \sin x + \cos x = 1$ (замена $t = \sin x + \cos x$)

10) $\sin x\cos x - \sin x - \cos x = 1$

11) $\sin^3 x + \cos^3 x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (сведите к $\sin x + \cos x$)

12) $\sin^3 x - \cos^3 x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Простейшие уравнения с арксинусом и арккосинусом

Теория

В этой главе мы рассмотрим простейшие уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции — арксинус и арккосинус. Эти уравнения имеют вид:

$$\arcsin x = a, \quad \arccos x = a$$

Уравнение $\arcsin x = a$
По определению, $\arcsin x = a$ означает, что $\sin a = x$ и $a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Следовательно:

- Если $a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то $x = \sin a$.
- Если a не принадлежит этому промежутку, то уравнение не имеет решений.

Уравнение $\arccos x = a$
По определению, $\arccos x = a$ означает, что $\cos a = x$ и $a \in [0, \pi]$.
Следовательно:

- Если $a \in [0, \pi]$, то $x = \cos a$.
- Если a не принадлежит этому промежутку, то уравнение не имеет решений.

Важное замечание: В этих уравнениях неизвестная величина x стоит под знаком обратной тригонометрической функции, а a — известное число. Это отличает их от уравнений вида $\sin x = a$, которые мы решали ранее.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Уравнение $\arcsin x = \frac{\pi}{6}$

Решим уравнение $\arcsin x = \frac{\pi}{6}$.
Так как $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то $x = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.
Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

Пример 2

Уравнение $\arcsin x = \frac{2\pi}{3}$

Решим уравнение $\arcsin x = \frac{2\pi}{3}$.

$\frac{2\pi}{3} \approx 2.094$, а область значений арксинуса $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \approx [-1.57, 1.57]$. Значение $\frac{2\pi}{3}$ не входит в этот промежуток, поэтому уравнение не имеет решений.

Ответ: корней нет.

Пример 3

Уравнение $\arccos x = \frac{\pi}{4}$

Решим уравнение $\arccos x = \frac{\pi}{4}$.
Так как $\frac{\pi}{4} \in [0, \pi]$, то $x = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Ответ: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 4

Уравнение $\arccos x = -\frac{\pi}{3}$

Решим уравнение $\arccos x = -\frac{\pi}{3}$.

Область значений арккосинуса $[0, \pi]$. Значение $-\frac{\pi}{3}$ не входит в этот промежуток, поэтому уравнение не имеет решений.

Ответ: корней нет.

Пример 5

Уравнение $\arcsin x = \arcsin \frac{1}{2}$

Решим уравнение $\arcsin x = \arcsin \frac{1}{2}$.

Вычислим $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Тогда уравнение сводится к $\arcsin x = \frac{\pi}{6}$, и $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

Пример 6

Уравнение $\arccos x = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$

Решим уравнение $\arccos x = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$. Тогда $\arccos x = \frac{\pi}{3}$, и $x = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

Пример 7

Общий алгоритм

При решении простейших уравнений с арксинусом и арккосинусом:

1. Проверяем, принадлежит ли правая часть a области значений соответствующей функции.
2. Если да, то x равен значению прямой тригонометрической функции от a.
3. Если нет, то уравнение не имеет решений.

Задачи

1. Решите уравнения с арксинусом:

1) $\arcsin x = 0$

2) $\arcsin x = \frac{\pi}{2}$

3) $\arcsin x = -\frac{\pi}{2}$

4) $\arcsin x = \frac{\pi}{6}$

5) $\arcsin x = -\frac{\pi}{6}$

6) $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$

7) $\arcsin x = -\frac{\pi}{4}$

8) $\arcsin x = \frac{\pi}{3}$

9) $\arcsin x = -\frac{\pi}{3}$

10) $\arcsin x = \frac{2\pi}{3}$ (есть ли решения?)

11) $\arcsin x = -\frac{2\pi}{3}$

12) $\arcsin x = \pi$

2. Решите уравнения с арккосинусом:

1) $\arccos x = 0$

2) $\arccos x = \pi$

3) $\arccos x = \frac{\pi}{2}$

4) $\arccos x = \frac{\pi}{3}$

5) $\arccos x = \frac{\pi}{4}$

6) $\arccos x = \frac{\pi}{6}$

7) $\arccos x = -\frac{\pi}{2}$ (есть ли решения?)

8) $\arccos x = -\frac{\pi}{3}$

9) $\arccos x = 2\pi$

10) $\arccos x = \frac{2\pi}{3}$

11) $\arccos x = \frac{3\pi}{4}$

12) $\arccos x = \frac{5\pi}{6}$

3. Решите уравнения, сводящиеся к простейшим:

1) $\arcsin x = \arcsin \frac{1}{2}$

2) $\arcsin x = \arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3) $\arccos x = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$

4) $\arccos x = \arccos \left(-\frac{1}{2}\right)$

5) $\arcsin x = \arccos \frac{1}{2}$

6) $\arccos x = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$

7) $\arcsin x = \arccos 0$

8) $\arccos x = \arcsin 0$

9) $\arcsin x = \arccos(-1)$

10) $\arccos x = \arcsin 1$

11) $\arcsin x = \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

12) $\arccos x = \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$

4. Найдите область определения и решите уравнения:

1) $\arcsin(x-1)=\frac{\pi}{6}$

2) $\arcsin(2x)=\frac{\pi}{4}$

3) $\arcsin\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{3}$

4) $\arccos(x+1)=\frac{\pi}{3}$

5) $\arccos(3x)=\frac{\pi}{2}$

6) $\arccos\frac{x}{3}=\pi$

7) $\arcsin(x^2)=\frac{\pi}{2}$ (обратите внимание на ОДЗ)

8) $\arccos(x^2)=0$

9) $\arcsin\sqrt{x}=\frac{\pi}{4}$

10) $\arccos\sqrt{x}=\frac{\pi}{3}$

11) $\arcsin\frac{1}{x}=\frac{\pi}{6}$ (при каких x имеет смысл?)

12) $\arccos\frac{1}{x}=\frac{\pi}{4}$

5. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ (тождество, выполняется для всех $x\in[-1,1]$)

2) $\arcsin x+\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$

3) $\arccos x-\arccos\frac{1}{2}=0$

4) $\arcsin x+\arccos 2x=\frac{\pi}{2}$

5) $\arcsin x=2\arcsin\frac{1}{2}$

6) $\arccos x=2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$

7) $\arcsin x=\arccos x$ (решите, используя тождество)

8) $\arcsin x=\arccos 2x$

9) $\arccos x=\arcsin\frac{x}{2}$

10) $\arcsin x+\arcsin 2x=\frac{\pi}{2}$

11) $\arccos x+\arccos 2x=\frac{\pi}{2}$

12) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{3}$ (возможно ли?)

Простейшие уравнения с арктангенсом и арккотангенсом

Теория

В этой главе мы рассмотрим простейшие уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции — арктангенс и арккотангенс. Эти уравнения имеют вид:

$$\operatorname{arctg} x = a, \quad \operatorname{arcctg} x = a$$

Уравнение $\operatorname{arctg} x = a$

По определению, $\operatorname{arctg} x = a$ означает, что $\operatorname{tg} a = x$ и $a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Следовательно:

- Если $a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то $x = \operatorname{tg} a$.
- Если a не принадлежит этому интервалу, то уравнение не имеет решений.

Уравнение $\operatorname{arcctg} x = a$

По определению, $\operatorname{arcctg} x = a$ означает, что $\operatorname{ctg} a = x$ и $a \in (0, \pi)$.

Следовательно:

- Если $a \in (0, \pi)$, то $x = \operatorname{ctg} a$.
- Если a не принадлежит этому интервалу, то уравнение не имеет решений.

Связь между арктангенсом и арккотангенсом:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Уравнение $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$

Решим уравнение $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$.

Так как $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то $x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$.

Ответ: $x = 1$.

Пример 2

Уравнение $\operatorname{arctg} x = \frac{2\pi}{3}$

Решим уравнение $\operatorname{arctg} x = \frac{2\pi}{3}$.

$\frac{2\pi}{3} \approx 2.094$, а область значений арктангенса $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \approx (-1.57, 1.57)$. Значение $\frac{2\pi}{3}$ не входит в этот интервал, поэтому уравнение не имеет решений.

Ответ: корней нет.

Пример 3

Уравнение $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{3}$

Решим уравнение $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{3}$.

Так как $\frac{\pi}{3} \in (0, \pi)$, то $x = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Пример 4

Уравнение $\operatorname{arcctg} x = -\frac{\pi}{4}$

Решим уравнение $\operatorname{arcctg} x = -\frac{\pi}{4}$.

Область значений арккотангенса $(0, \pi)$. Значение $-\frac{\pi}{4}$ не входит в этот интервал, поэтому уравнение не имеет решений.

Ответ: корней нет.

Пример 5

Уравнение $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} 1$

Решим уравнение $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} 1$.

Вычислим $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Тогда $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$, и $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

Пример 6

Использование тождества

Решим уравнение $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ для $x > 0$.

Используем тождество $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$. Но $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ для $x > 0$. Поэтому уравнение выполняется для всех $x > 0$.

Ответ: $x > 0$ (любое положительное число).

Пример 7

Общий алгоритм

При решении простейших уравнений с арктангенсом и арккотангенсом:

1. Проверяем, принадлежит ли правая часть a области значений соответствующей функции.
2. Если да, то x равен значению прямой тригонометрической функции от a.
3. Если нет, то уравнение не имеет решений.

Задачи

1. Решите уравнения с арктангенсом:

1) $\operatorname{arctg} x = 0$

2) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$

3) $\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{4}$

4) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{3}$

5) $\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{3}$

6) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{6}$

7) $\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{6}$

8) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ (есть ли решения?)

9) $\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$

10) $\operatorname{arctg} x = \frac{2\pi}{3}$

11) $\operatorname{arctg} x = -\frac{2\pi}{3}$

12) $\operatorname{arctg} x = \pi$

2. Решите уравнения с арккотангенсом:

1) $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$

2) $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{4}$

3) $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{3}$

4) $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{6}$

5) $\operatorname{arcctg} x = \frac{2\pi}{3}$

6) $\operatorname{arcctg} x = \frac{3\pi}{4}$

7) $\operatorname{arcctg} x = \frac{5\pi}{6}$

8) $\operatorname{arcctg} x = 0$ (есть ли решения?)

9) $\operatorname{arcctg} x = \pi$

10) $\operatorname{arcctg} x = -\frac{\pi}{4}$

11) $\operatorname{arcctg} x = -\frac{\pi}{3}$

12) $\operatorname{arcctg} x = 2\pi$

3. Решите уравнения, сводящиеся к простейшим:

1) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1$

2) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}(-1)$

3) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \sqrt{3}$

4) $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$

5) $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$

6) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} 1$

7) $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg} \sqrt{3}$

8) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$

9) $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg}(-1)$

10) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} 0$

11) $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg} 0$

12) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$

4. Найдите область определения и решите уравнения:

1) $\operatorname{arctg}(x-1)=\frac{\pi}{4}$

2) $\operatorname{arctg}(2x)=\frac{\pi}{6}$

3) $\operatorname{arctg}\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{3}$

4) $\operatorname{arcctg}(x+1)=\frac{\pi}{3}$

5) $\operatorname{arcctg}(3x)=\frac{\pi}{4}$

6) $\operatorname{arcctg}\frac{x}{3}=\frac{2\pi}{3}$

7) $\operatorname{arctg}(x^2)=\frac{\pi}{4}$

8) $\operatorname{arcctg}(x^2)=\frac{\pi}{2}$

9) $\operatorname{arctg}\sqrt{x}=\frac{\pi}{6}$

10) $\operatorname{arcctg}\sqrt{x}=\frac{\pi}{3}$

11) $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{4}$ (при каких x имеет смысл?)

12) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{3}$

5. Решите уравнения, используя тождество $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x=\frac{\pi}{2}$:

1) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x=\frac{\pi}{2}$ (тождество, выполняется для всех x)

2) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}2x=\frac{\pi}{2}$

3) $\operatorname{arctg}2x+\operatorname{arcctg}x=\frac{\pi}{2}$

4) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$ (для $x>0$)

5) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$ (для $x<0$)

6) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}2x=\frac{\pi}{4}$

7) $\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y=\frac{\pi}{4}$ (с параметрами)

8) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=\frac{\pi}{2}$

9) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=\pi$

10) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}(1-x)=\frac{\pi}{4}$

11) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}=\frac{\pi}{4}$ (формула сложения)

12) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}=\frac{\pi}{2}$

Практика по блоку 6

Теория

В этом блоке мы изучили простейшие уравнения с обратными тригонометрическими функциями:

- $\arcsin x = a$ — решения есть только при $a \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, тогда $x = \sin a$
- $\arccos x = a$ — решения есть только при $a \in [0, \pi]$, тогда $x = \cos a$
- $\operatorname{arctg} x = a$ — решения есть только при $a \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, тогда $x = \operatorname{tg} a$
- $\operatorname{arcctg} x = a$ — решения есть только при $a \in (0, \pi)$, тогда $x = \operatorname{ctg} a$

Также мы рассмотрели уравнения, в которых аргументы обратных функций являются выражениями, и уравнения, сводящиеся к простейшим с помощью известных значений.

В этой главе собраны задачи на все эти типы уравнений вперемешку. Ваша задача — определить тип уравнения и применить нужный метод.

Задачи

1. Решите уравнения с арксинусом:

1) $\arcsin x = 0$

2) $\arcsin x = \frac{\pi}{2}$

3) $\arcsin x = -\frac{\pi}{6}$

4) $\arcsin x = \frac{\pi}{3}$

5) $\arcsin x = \frac{2\pi}{3}$ (есть ли решения?)

6) $\arcsin x = \arcsin \frac{1}{2}$

7) $\arcsin x = \arccos \frac{1}{2}$

8) $\arcsin(x-1) = \frac{\pi}{6}$

9) $\arcsin(2x) = \frac{\pi}{4}$

10) $\arcsin \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3}$

11) $\arcsin(x^2) = \frac{\pi}{2}$

12) $\arcsin \sqrt{x} = \frac{\pi}{4}$

2. Решите уравнения с арккосинусом:

1) $\arccos x = 0$

2) $\arccos x = \pi$

3) $\arccos x = \frac{\pi}{2}$

4) $\arccos x = \frac{\pi}{3}$

5) $\arccos x = \frac{2\pi}{3}$

6) $\arccos x = \arccos \frac{1}{2}$

7) $\arccos x = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$

8) $\arccos(x+1) = \frac{\pi}{3}$

9) $\arccos(2x) = \frac{\pi}{4}$

10) $\arccos \frac{x}{3} = \frac{2\pi}{3}$

11) $\arccos(x^2) = 0$

12) $\arccos \sqrt{x} = \frac{\pi}{3}$

3. Решите уравнения с арктангенсом:

1) $\operatorname{arctg} x = 0$

2) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$

3) $\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{4}$

4) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{3}$

5) $\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{6}$

6) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1$

7) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} 1$

8) $\operatorname{arctg}(x-1) = \frac{\pi}{4}$

9) $\operatorname{arctg}(2x) = \frac{\pi}{6}$

10) $\operatorname{arctg} \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3}$

11) $\operatorname{arctg}(x^2) = \frac{\pi}{4}$

12) $\operatorname{arctg} \sqrt{x} = \frac{\pi}{6}$

4. Решите уравнения с арккотангенсом:

1) $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$

2) $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{4}$

3) $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{3}$

4) $\operatorname{arcctg} x = \frac{2\pi}{3}$

5) $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$

6) $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg} \sqrt{3}$

7) $\operatorname{arcctg}(x+1) = \frac{\pi}{3}$

8) $\operatorname{arcctg}(2x) = \frac{\pi}{4}$

9) $\operatorname{arcctg} \frac{x}{3} = \frac{2\pi}{3}$

10) $\operatorname{arcctg}(x^2) = \frac{\pi}{2}$

11) $\operatorname{arcctg} \sqrt{x} = \frac{\pi}{3}$

12) $\operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{4}$ (при каких x?)

5. Решите уравнения смешанных типов:

1) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ (тождество)

2) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$ (тождество)

3) $\arcsin x = \arccos x$

4) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} x$

5) $\arcsin x + \arcsin 2x = \frac{\pi}{2}$

6) $\arccos x + \arccos 2x = \frac{\pi}{2}$

7) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2x = \frac{\pi}{4}$

8) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ (для $x > 0$)

9) $\arcsin x + \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$

10) $\arccos x - \arccos \frac{1}{2} = 0$

11) $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$

12) $\arcsin x = 2 \arcsin \frac{1}{2}$

6. Найдите область определения и решите уравнения:

1) $\arcsin \frac{x}{x-1} = \frac{\pi}{6}$

2) $\arccos \frac{x+1}{x-2} = \frac{\pi}{3}$

3) $\operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} = \frac{\pi}{4}$ (формула тангенса двойного угла)

4) $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ (формула универсальной подстановки)

5) $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{\pi}{3}$

6) $\operatorname{arctg} \frac{x}{1-x^2} = \frac{\pi}{6}$

7) $\arcsin x + \arcsin \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$ (для $x \in [0, 1]$)

8) $\arccos x + \arccos \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$

9) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}$ (формула сложения)

10) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg} x$ (тождество)

11) $\arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ (для $x > 0$)

12) $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 2 \operatorname{arctg} x$ (для $|x| \leq 1$)

Практика на все-все приёмы

Теория

Мы изучили все основные типы тригонометрических уравнений:

- Простейшие уравнения: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$
- Уравнения с линейной заменой: $\sin(kx + b) = a$, $\cos(kx + b) = a$, $\operatorname{tg}(kx + b) = a$, $\operatorname{ctg}(kx + b) = a$
- Разложение на множители: вынесение общего множителя, группировка, преобразование суммы в произведение
- Уравнения, сводящиеся к квадратным: замена $t = \sin x$, $t = \cos x$, $t = \operatorname{tg} x$, $t = \operatorname{ctg} x$
- Однородные уравнения первой и второй степени
- Метод вспомогательного угла: $a \sin x + b \cos x = c$
- Уравнения с двойными углами
- Уравнения с обратными тригонометрическими функциями

В этой главе собраны задачи всех типов вперемешку — от простых до сложных. Ваша задача — определить, какой метод или комбинацию методов нужно применить в каждом конкретном случае.

Задачи

1. Решите простейшие уравнения:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$
2) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
3) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$
4) $\operatorname{ctg} x = -1$
5) $\sin x = 0$
6) $\cos x = 1$
7) $\operatorname{tg} x = 0$
8) $\operatorname{ctg} x = 0$
9) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
10) $\cos x = \frac{1}{2}$
11) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
12) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$

2. Решите уравнения с линейной заменой:

1) $\sin 2x = \frac{1}{2}$
2) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
3) $\operatorname{tg} 4x = 1$
4) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}$
5) $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0$
6) $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$
7) $\operatorname{tg}(2x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
8) $\operatorname{ctg}(2x - \frac{\pi}{8}) = -1$
9) $\sin(3x - \frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
10) $\cos(4x + \frac{\pi}{7}) = -\frac{1}{2}$
11) $\operatorname{tg}(5x + \frac{\pi}{9}) = 0$
12) $\operatorname{ctg}(6x - \frac{\pi}{11}) = \sqrt{3}$

3. Решите уравнения разложением на множители:

1) $\sin x \cos x = 0$
2) $\sin x(2\cos x - 1) = 0$
3) $\sin^2 x - \sin x = 0$
4) $\cos^2 x - \cos x = 0$
5) $\sin x + \sin 3x = 0$
6) $\cos x - \cos 3x = 0$
7) $\sin 2x + \sin 4x = 0$
8) $\cos 2x - \cos 4x = 0$
9) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$
10) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$
11) $\sin x \cos 2x - \sin 2x \cos x = 0$
12) $\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x = \frac{1}{2}$

4. Решите уравнения, сводящиеся к квадратным:

1) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$
2) $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$
3) $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$
4) $\operatorname{ctg}^2 x - 4\operatorname{ctg} x + 3 = 0$
5) $\cos 2x + 3\sin x - 2 = 0$
6) $\cos 2x - 5\cos x - 2 = 0$
7) $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$
8) $2\sin^2 x - 3\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$
9) $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$

10) $\sin x\cos x-\cos^2 x=0$

11) $3\sin^2 x-4\sin x\cos x+\cos^2 x=0$

12) $\sin^2 x-3\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$

5. Решите однородные уравнения:

1) $\sin x-\cos x=0$

2) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$

3) $2\sin x-3\cos x=0$

4) $\sin^2 x-3\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$

5) $\sin^2 x+\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$

6) $2\sin^2 x-3\sin x\cos x+\cos^2 x=0$

7) $3\sin^2 x-4\sin x\cos x+\cos^2 x=0$

8) $\sin^2 x-4\sin x\cos x+3\cos^2 x=0$

9) $\sin^2 x+3\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$

10) $2\sin^2 x-\sin x\cos x-\cos^2 x=0$

11) $3\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x=0$

12) $4\sin^2 x-4\sin x\cos x+\cos^2 x=0$

6. Решите уравнения методом вспомогательного угла:

1) $\sin x+\cos x=1$

2) $\sin x-\cos x=1$

3) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=1$

4) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2$

5) $3\sin x+4\cos x=5$

6) $5\sin x+12\cos x=13$

7) $8\sin x+15\cos x=17$

8) $7\sin x+24\cos x=25$

9) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$

10) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}$

11) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2$

12) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$

7. Решите уравнения с двойными углами:

1) $\sin 2x=\sin x$

2) $\sin 2x=\cos x$

3) $\cos 2x=\cos x$

4) $\cos 2x=\sin x$

5) $\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg} x$

6) $\sin 2x+\sin x=0$

7) $\cos 2x+\cos x=0$

8) $\sin 2x+\cos 2x=1$

9) $\sin 2x-\cos 2x=1$

10) $\sin^2 x-\cos^2 x=\frac{1}{2}$

11) $\sin^2 x+\sin^2 2x=1$

12) $\cos^2 x+\cos^2 2x=1$

8. Решите уравнения с обратными тригонометрическими функциями:

1) $\arcsin x=\frac{\pi}{6}$

2) $\arccos x=\frac{\pi}{3}$

3) $\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{4}$

4) $\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}$

5) $\arcsin(x-1)=\frac{\pi}{6}$

6) $\arccos(2x)=\frac{\pi}{4}$

7) $\operatorname{arctg}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}$

8) $\operatorname{arcctg}(x^2)=\frac{\pi}{4}$

9) $\arcsin x=\arccos\frac{1}{2}$

10) $\operatorname{arctg} x=\operatorname{arcctg} 1$

11) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$

12) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}$

9. Задачи повышенной сложности:

1) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin 2x$

2) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\cos 2x$

3) $\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

4) $\sin^3 x-\cos^3 x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

5) $\sin x\cos x+\sin x+\cos x=1$ (замена $t=\sin x+\cos x$)

6) $\sin x\cos x-\sin x-\cos x=1$

7) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2$

8) $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x=2$

9) $\sin 4x+\sin 2x=\cos x$

10) $\cos 4x+\cos 2x=\sin x$

11) $\sin 5x+\sin 3x=\sin 4x$

12) $\cos 5x+\cos 3x=\cos 4x$

Заключение

Вот мы и добрались до конца книги. Если вы дошли до этих строк и прорешали хотя бы часть задач — значит, вы проделали огромную работу. Поздравляю!

Тригонометрические уравнения — это та тема, где многие школьники начинают паниковать. Слишком много формул, слишком много разных методов, слишком легко запутаться в периодах и сериях корней... Но теперь вы знаете, что за всей этой сложностью скрывается стройная и красивая система.

В этой книге мы разобрали все основные типы тригонометрических уравнений и методы их решения:

- начали с самого простого — уравнений вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, познакомились с обратными тригонометрическими функциями;
- научились решать уравнения с линейной заменой $\sin(kx + b) = a$ и аналогичные;
- освоили разложение на множители — вынесение общего множителя, группировку, преобразование суммы в произведение;
- изучили уравнения, сводящиеся к квадратным с помощью замены $t = \sin x$, $t = \cos x$, $t = \operatorname{tg} x$, $t = \operatorname{ctg} x$;
- разобрались с однородными уравнениями первой и второй степени;
- освоили метод вспомогательного угла для уравнений вида $a \sin x + b \cos x = c$;
- научились работать с уравнениями, содержащими двойные углы;
- познакомились с уравнениями, в которых фигурируют обратные тригонометрические функции.

Но главное — мы научились главному: видеть, какой метод нужно применить в каждом конкретном случае. Потому что в реальных примерах никто не пишет «решите уравнение методом вспомогательного угла» или «здесь нужна замена $t = \sin x$». Вы просто видите уравнение и должны сами понять, как его решать. И чем больше у вас опыта, тем быстрее приходит это понимание.

Если какие-то темы остались непонятыми — не расстраивайтесь. Вернитесь к ним ещё раз, порешайте дополнительные задачи. Математика не терпит суеты, но она очень благодарна тем, кто проявляет терпение и настойчивость.

А если вам понравился такой формат — теория, примеры, много задач — у меня есть и другие книги. На сайте books.mrepetitor.com вы найдёте пособия по разным темам школьной математики и физики. Там же есть научно-популярные книги, которые я писал для тех учеников, кому интересно не только решать задачи, но и понимать, как устроен окружающий мир, как развивалась наука и какие люди стояли за великими открытиями.

Записаться на мои занятия можно на сайте study.mrepetitor.com. Я продолжаю преподавать математику и физику для школьников с 5 по 11 классы, готовлю к ЕГЭ, ОГЭ и ЦТ. Если чувствуете, что нужна помощь, или хотите подготовиться к экзаменам — обращайтесь!

Желаю вам успехов в учёбе, побольше интересных задач и удовольствия от их решения!

Дмитрий Трепачёв